La vida
entre teoremas

La vida
entre teoremas

Antonio Córdoba

JDB
Jot Down Books

La vida entre teoremas
© Antonio Córdoba
Primera Edición: Abril, 2014
Diseño de portada: Daniel Miñana
Edición: Francesc Monrabal
Corrección: Pablo Fernández
Maquetación: Prema Ediciones
Impresión: Gráficas Pir-Gar, Barcelona.
ISBN: 978-8-494093-93-7
DEPÓSITO LEGAL: SE-770-2014

www.jotdown.es

Índice

Prólogo

La divulgación científica

En su célebre ensayo *A mathematician's apology*, el gran matemático inglés G. H. Hardy calificó de melancólica la experiencia de escribir o hablar en torno a las matemáticas, mostrando su desdén por la mera divulgación: «La tarea de un matemático es crear teorías y demostrar nuevos teoremas, y no lo es tanto hablar acerca de lo que él mismo u otros hayan hecho. […] No puede haber desprecio más profundo, y en el fondo más justificado, que el de los hombres que crean hacia los que divulgan. La exposición, la crítica y la divulgación son trabajos para mentes de segunda clase.»

Ahora, sin embargo, un socorrido lugar común califica esas tareas de importantes, aunque difíciles, instándonos a los científicos a realizar el esfuerzo necesario para dar a conocer nuestro trabajo a la gente, tanto por el respeto debido a los ciudadanos, cuanto por nuestro propio interés y afán de supervivencia. Cuando esa empresa se acomete en la prensa diaria, la limitación de espacio, la inoportunidad de usar símbolos y fórmulas, y la necesidad de atraer la atención de los lectores la convierten en una tarea especialmente ardua. Los osados que la emprenden suelen, a menudo, caer en ciertos vicios que transmiten una imagen algo distorsionada de lo que es la labor de un matemático. Pero, a pesar de todos esos inconvenientes, estoy entre los que animan a quienes tengan facilidad de escritura a utilizar los medios de comunicación a su alcance, para mostrar a las personas interesadas en saberlo que las matemáticas son una ciencia viva y útil, que son importantes para el progreso y que están a veces escondidas en muchas actividades de nuestra experiencia cotidiana.

Tengo entendido que los boxeadores y los especialistas en artes marciales tienen prohibido utilizar sus destrezas frente a quienes carecen de ellas. Por la misma razón me parece que un matemático debe abstenerse de usar toda la fuerza de su lenguaje al tratar un asunto con quienes no lo dominan, y que tampoco cabe abusar de las definiciones, que por precisas se hacen a veces difíciles, ni de las largas cadenas de silogismos, si es que se pretende divulgar con éxito esta varias veces milenaria ciencia. Pero eso no obsta para que cuando un matemático escriba o hable dirigiéndose a un público amplio, haya de poner un cuidado exquisito en la pulcritud de sus razonamientos.

Ian Stewart y Martin Gardner son dos notables ejemplos de éxito reconocido en el arte de popularizar las matemáticas, cuyos textos han sido traducidos a muchos idiomas. Aunque todavía escasos, también en España contamos con algunos profesionales de la divulgación. Pero ese no es mi caso: la mayor parte del tiempo, como profesor e investigador, he estado dedicado al clásico empeño de hacer avanzar la frontera de las matemáticas, formar a otros investigadores y enseñar a universitarios. De vez en cuando, no obstante, he sido requerido para dirigirme a un público más amplio, impartiendo conferencias o publicando artículos en revistas literarias y periódicos. Por lo que al cabo de los años he acumulado un material que he utilizado generosamente en estos ensayos.

En el caso de *Saber Leer*, su director me había invitado amablemente, en repetidas ocasiones, a escribir en sus páginas. Y aunque me agradaba mucho su carácter y la extraordinaria calidad de sus colaboradores, se me hacía cuesta arriba al principio, por cuanto publicar allí significaba algo muy distinto a lo que estaba acostumbrado en las revistas de mi especialidad. Pero finalmente lo acabé haciendo y disfruté con la experiencia, de manera que eché de menos esa actividad cuando, años después, la Fundación Juan March decidió, a mi parecer equivocadamente, prescindir de *Saber Leer*.

En las contadas ocasiones en las que me he aventurado a escribir en la prensa diaria, he tenido ocasión de experimentar algunos de los riesgos que esa empresa conlleva. A quien desee intentarlo puedo darle un consejo: conviene dejar siempre muy claro que solo pretendemos dar una versión impresionista de las ideas, centrándonos en lo que juzgamos más importante, pero sin ánimo de precisar todas las definiciones y hacer las salvedades, que serían apropiadas en un trabajo más extenso, pero que harían ilegible un ensayo o un artículo periodístico. No es esta la ocasión de relatarlas, pero dispongo de un rico caudal de anécdotas pintorescas que van desde los «aficionados al fermat» que vinieron, a veces desde muy lejos, a mostrarme sus «demostraciones propias», registradas ya ante notario, a raíz de un artículo que publiqué en *El País* cuando se dio a conocer la prueba de Andrew Wiles en el verano de 1993; hasta la bendita testarudez de quienes habían calculado, usando papel milimetrado, el número exacto de puntos del retículo unidad que caben dentro de los círculos de radio próximo a cien, motivados por otro artículo mío en el mismo diario, escrito algunos años después en colaboración con Luis Seco y Charles Fefferman. Titulado «Números, átomos y estrellas», nos proponíamos en él divulgar nuestros resultados de entonces en torno a los fundamentos matemáticos rigurosos de la mecánica cuántica. Proyecto en el que habíamos encontrado una conexión interesante con ese problema clásico de la teoría de los números, que pregunta por el error cometido al comparar el área de un círculo con el número de puntos de coordenadas enteras que están contenidos en su interior. Pero no resultó nada fácil disuadir a varios «aficionados» de la banalidad del empeño de calcular gráficamente valores particulares de ese término de error usando papel milimetrado, ni tampoco lo fue transmitir el carácter asintótico del problema.

Años más tarde volví a reincidir en esta aventura con un artículo, publicado en la sección «Futuro» de *El País,* en torno a la solución de la conjetura de Kepler, cuya demostración apareció en la prestigiosa revista *Annals of Mathematics*, en su número de noviembre de 2005. Tratándose de un problema relativamente fácil de explicar a los lectores (¿es la solución implementada por los fruteros la manera más eficiente de empaquetar bolas iguales en el espacio?), que une a su historia pintoresca la relevancia de los científicos implicados en su solución, y dada la naturaleza final de la demostración que hace un uso esencial del ordenador, me creí capaz de engarzar unas líneas que pudiesen interesar a un público general, subrayando las vicisitudes del proceso de verificación de la prueba de las que yo tenía noticia de primera mano a través de Peter Sarnak (amigo y editor de *Annals*), quien amablemente me envió también el manifiesto editorial que la revista había decidido publicar a propósito del uso de los ordenadores en una demostración.

De manera que, junto a una muy sucinta historia y planteamiento del problema, escribí unos comentarios sobre la actuación del comité de expertos y el editorial, que exponía el desafío que las demostraciones asistidas por ordenador presentan a una revista de la trayectoria y calidad de *Annals of Mathematics.* Naturalmente, incluí algunas preguntas retóricas que estimaba yo que un ciudadano ilustrado podría hacerse en torno a la interacción de las matemáticas con el ordenador. Pero también acerca de la influencia que las computadoras, a través de internet y de ciertas agencias conocidas de evaluación, están teniendo en la profesión, estimulando una excesiva proliferación de publicaciones innecesarias, cuya única finalidad es hinchar los *curricula* de sus autores. Para mi sorpresa, esta vez las anécdotas no tuvieron que ver con los aficionados a resolver problemas de empaquetamiento de esferas, sino con miembros establecidos de la profesión que se sintieron aludidos y, de manera privada muchos y pública algunos, me hicieron llegar sus opiniones. La mayoría me mostró su complacencia y acuerdo con lo sugerido en el artículo y con la oportunidad de decirlo, pero también tuve reacciones muy negativas, discrepando en el fondo y en la forma, incluso con cierta virulencia, del contenido y del vehículo utilizado para difundirlo.

Existe una rica tradición ensayística en castellano que se remonta, por lo menos, a la generación del 98, pero sobre asuntos de historia, filosofía, arte, folclore, literatura, economía o política. La escasa aportación científica española a lo largo de la historia, Ramón y Cajal aparte, es quizás la causa de que las ciencias hayan quedado casi siempre al margen de esa corriente, en cuanto a sus propios objetivos y resultados, aunque sí han sido motivo de múltiples ensayos las causas que impidieron su desarrollo en nuestro país: se trata de la famosa polémica en torno a la ciencia española, en la que terciaron personajes como Echegaray o Menéndez Pelayo. No existen pues demasiados modelos en los que inspirarse, pero eso, creo yo, representa un baldón en nuestra cultura que sería deseable corregir. Sobre todo teniendo en cuenta el extraordinario avance que las ciencias han experimentado en España en las últimas décadas: en el caso concreto de las matemáticas, representa haber pasado de un 0,4% de la totalidad de artículos publicados en las revistas de circulación internacional en 1980, a un 4,5% en el año 2012.

El lenguaje tan preciso de las matemáticas facilita la comunicación entre los expertos, tengan el idioma que tengan, aunque el inglés, que es la *lingua franca* de la ciencia contemporánea, se hable con acentos tan distintos y dispares que a veces resultan muy arduos de entender. Sin embargo, en cuanto la atención se centra en los teoremas, la precisión de su lenguaje intrínseco facilita enormemente la discusión. La actividad matemática es de índole internacional y en ella las colaboraciones y las amistades no conocen fronteras. Por lo que en este mundo global al que parecemos abocados, la comunidad matemática ya se ha adelantado muchas décadas. Y eso resulta muy fácil de constatar ahora a través de internet: por ejemplo, en el *Mathematical Genealogy Project* de la Universidad de Minnesota, donde se encuentra el árbol genealógico académico de los matemáticos, y también en los caminos de colaboración que conectan a dos investigadores cualesquiera que nos interese relacionar.

Aunque tampoco abunden los ensayos acerca de la ciencia en otros ámbitos, los usos universitarios españoles tanto tiempo vigentes no han propiciado, precisamente, esa reflexión crítica que el género ensayo conlleva: en el año 1978, mientras disfrutaba de un sabático en la Universidad de Princeton, obtuve la cátedra de Análisis Matemático de la Universidad Complutense, tras una «oposición» que constaba de cinco ejercicios y ante un tribunal de siete catedráticos españoles de la especialidad. Al menos tres de los susodichos ejercicios eran totalmente ridículos: pedirle a un doctor en Matemáticas por la Universidad de Chicago, con publicaciones en *Annals of Mathematics* y algunas otras revistas importantes, que explicara una lección de Cálculo Diferencial o resolviese en una hora algunos problemas elementales propuestos por el tribunal, me pareció entonces, y me sigue pareciendo ahora, una completa estupidez.

Sin embargo, había una prueba que sí tenía mucho sentido y que implicaba la elaboración de un ensayo, o memoria de investigación, en la que al aspirante a catedrático se le pedía que llevara a cabo, o eso creía yo, una reflexión intelectual sobre la naturaleza de su oficio: historia, evolución, resultados más importantes, herramientas y principales objetos del deseo. Pero las memorias escritas por quienes habían superado anteriormente la prueba con éxito se limitaban a reproducir fielmente una tras otra, en una especie de plagio continuo, una serie de tópicos y temas manidos acerca de si era o no era conveniente introducir la integral de Riemann antes que la de Lebesgue, o si procedía demostrar el teorema de Stokes en dominios del espacio euclídeo antes de definir el concepto de orientación, o viceversa. Naturalmente, me negué a seguir esa rutina y de acuerdo con algo que todavía me parece muy sensato pedirle a un futuro catedrático, escribí, creo que con honradez y toda modestia, un ensayo original, inspirándome en las ideas de Thomas Kuhn (a quien conocía de la Universidad de Princeton, en la que ambos éramos profesores entonces) contenidas en su obra *The structure of scientific revolutions.* De manera que redacté mi visión del análisis matemático señalando los paradigmas más importantes relacionados con mi propia investigación, poniendo énfasis en los resultados recientes que se resistían a ser explicados por ellos, y apuntando las líneas de actividad que me parecían más prometedoras.

Pero mi ensayo no fue del agrado de aquel tribunal, y creo que no tanto por las ideas expuestas, ni por la más o menos afortunada redacción, sino por el hecho en sí de haber osado desviarme de la tradición y la rutina establecidas. Uno de sus miembros me acusó públicamente de no tomarme en serio las matemáticas, por haber usado el concepto de *paradigma*, que le era desconocido. Les supo mal que, en vez de achantarme ante sus críticas, respondiese con rotundidad y que tras un intercambio de argumentos algunos miembros del tribunal salieran algo malparados. Me dieron solo tres de los siete votos posibles en ese ejercicio y, según me contaron después, estuvieron muy cerca de suspenderme y penalizar así mi supuesta arrogancia, pero finalmente no lo hicieron, me dieron la plaza y no se habló de ese asunto nada más.

La cátedra se llamaba Análisis Matemático II y tenía a su cargo la asignatura de «Cálculo diferencial de varias variables». Conviene decir que había cátedras de Análisis Matemático III y IV, que se encargaban, respectivamente, de las ecuaciones diferenciales y de la variable compleja. ¡Un área de conocimiento, que diríamos ahora, fraccionada en tres compartimentos distintos cuyos catedráticos repetían, año tras año, la misma asignatura! ¡Un aburrimiento tremendo!

Pero yo había aprendido, siendo estudiante de doctorado en Chicago y joven profesor en Princeton, que las cosas no tienen que ser necesariamente así. Que las matemáticas no están tan parceladas y que en estas universidades se considera que las materias de la licenciatura son patrimonio común, estimándose positivo que los profesores enseñen un amplio espectro de asignaturas. Eso elimina en parte la inflación de los programas, por cuanto las nuevas plazas de profesorado no son adscritas por la docencia, sino por la investigación. No obstante, todas mis propuestas de cambio fracasaron entonces: la rotación de la docencia, la cooptación de los nuevos profesores y el proyecto de centralizar en una sola biblioteca las que estaban dispersas por los diferentes departamentos. No sólo tuve la oposición de los catedráticos «veteranos», con la que ya contaba, sino que tampoco los profesores más jóvenes veían claras mis ideas y sus consecuencias para el sistema entonces establecido de ascensos y traslados.

Enseguida se extendió sobre aquellos proyectos de mejora la sospecha conspirativa: ¿qué querrá éste?, ¿qué tipo de poder busca? El país estaba entonces en plena transición democrática, cambiando el sistema político y dotándose de una constitución, pero en la Universidad éramos incapaces de romper el sistema de clanes, o de tomar la responsabilidad en la cooptación de los nuevos profesores. Reflexionando luego sobre aquellos avatares, sorprende lo fácil que resulta entre nosotros descalificar a quien despunta un poco, por haber visto otras realidades y tener otras experiencias, y nos señala algún camino de mejora. Duelen las oportunidades que se han perdido marginando a muchos profesionales que hubieran sido capaces de llevar a cabo un proyecto universitario más ambicioso.

Han pasado más de treinta años y, según creo, allí todavía siguen en una situación parecida de docencia compartimentada. En cuanto a mi anécdota personal, decidí poner tierra por medio y regresé a Princeton. Luego después, ya en la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), colaboré en poner en marcha alguna de esas ideas, creando un Departamento de Matemáticas que fuese un foco desde el que irradiar la modernidad (¡qué ingenuidad!), pero eso fue ya en los ochenta, en tiempos de la Movida, como suele denominarse a la efervescencia de ánimos e ideas que tuvo lugar en esa década, recién estrenada la democracia, cuando una bocanada de aire fresco, descaro, desparpajo y ganas de disfrutar y cambiar las costumbres se extendió por las Españas, siendo quizás los bandos del alcalde de Madrid, Enrique Tierno Galván, y el cine de Pedro Almodóvar los dos buques insignia más populares de aquellos tiempos.

El empeño de crear un foco de matemáticas en la UAM alcanzó sus límites naturales en el momento en el que nuestros doctores no eran contratados en las otras universidades españolas (aunque sí lo eran en Estados Unidos), permaneciendo un año tras otro en el departamento con unos contratos muy precarios; o cuando nuestros profesores titulares, seguramente en posesión de unos buenos currículos respecto a la media nacional, tenían serias dificultades, por decirlo de manera muy suave, para acceder a cátedras de otras universidades. Estas circunstancias atacaron duramente la línea de flotación: disponer de un número adecuado de plazas que ofrecer cada año a doctores recientes de otras universidades del mundo, quienes traen sus ideas y proyectos, integrándose y renovando los propios del departamento, es un *sine qua non* para que este crezca y mantenga una buena salud científica. Promocionar sistemáticamente a los propios empobrece la biodiversidad y favorece en demasía el aumento del número de investigadores en áreas muy parecidas. Mantener a personas competentes en su trabajo docente e investigador durante años y años (mucho más allá de un límite tolerable) sin un contrato adecuado que garantice la estabilidad, o sin unas perspectivas de promoción en otras universidades, es un trato improcedente en estos tiempos. Esta situación produjo un deterioro en el trato y en las maneras que acabaron incidiendo muy negativamente en la evolución de aquel foco de modernidad matemática que, no obstante, desempeñó durante un tiempo un papel de relevancia en la positiva evolución que las matemáticas han experimentado en nuestro país.

¿Y si todo fuera un número?

Los números enteros y sus operaciones de suma, resta, multiplicación y división son un instrumento fundamental de la mente para comprender el mundo que nos rodea. El desarrollo de las destrezas aritméticas constituye, junto con el aprendizaje del propio idioma, una parte muy importante de la educación de los ciudadanos. Pero la noción de número ha dado lugar también a magníficas teorías y sigue planteando problemas profundos al pensamiento humano.

Cuenta la leyenda que Pitágoras estaba paseando cuando reparó en el sonido proveniente del golpeo de los martillos de una herrería. Algunos de ellos sonaban acompasados, pero había otros que lo hacían de manera disonante. Pitágoras se interesó por el fenómeno y estudió esos martillos tratando de lograr una explicación. Luego experimentó con el sonido producido por cuerdas vibrantes de distinta longitud, y así descubrió la afinación musical todavía vigente, llamada pitagórica en su honor.

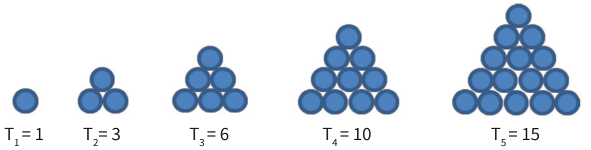
Hay quien ve en esta anécdota el comienzo de la ciencia en la antigua Grecia. Que las leyes de la concordancia sonora puedieran ser expresadas a través de cocientes de números enteros resultó ser un hecho sorprendente y en gran medida revolucionario. Los pitagóricos desarrollaron esa idea descubriendo muchas proposiciones aritméticas interesantes y la convirtieron en una cosmogonía, en un principio filosófico según el cual «todo es número». Los físicos teóricos contemporáneos han llegado también a conclusiones parecidas en su búsqueda de esa «teoría final» o «teoría del todo» que unifique la relatividad general y la mecánica cuántica en un conjunto sencillo de leyes fundamentales, a partir de las cuales pueda deducirse todo lo demás. En su estado actual, ese gran proyecto reduccionista necesita de unas matemáticas más potentes de las que ahora tenemos a nuestra disposición, por lo que representa un gran estímulo para la investigación. Y en eso andamos.

Volviendo a los griegos, resulta sorprendente la cantidad y calidad de los descubrimientos y los problemas que plantearon. Un ejemplo es la sucesión de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13…, de la que supieron que era infinita y detectaron el papel fundamental que desempeña en la aritmética: todo número natural, ora es la unidad, ya es un producto de primos (único, salvo el orden de los factores).

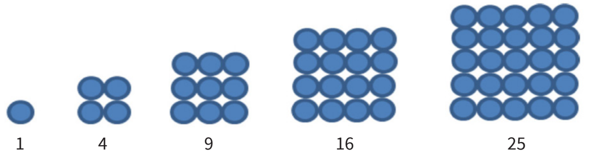
Entender la manera como aparecen distribuidos los primos entre los enteros ha sido un objeto del deseo desde los pitagóricos que ha propiciado descubrimientos profundos y que todavía plantea enigmas a la inteligencia humana, como es la hipótesis de Riemann (que atañe, precisamente, a la precisión con la que podemos estimar la cantidad de números primos menores que un número entero dado), y que es, quizás, el problema abierto más codiciado. Otro ejemplo son las parejas de primos gemelos (o primos hermanos), tales como: 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19… ¿Existen infinitas de ellas? Se trata de un pintoresco problema enunciado por los griegos del período clásico y cuya respuesta nos es todavía desconocida. Algunos conceptos, como el de *número perfecto,* también se remontan a aquellos tiempos: un número es perfecto si coincide con la suma de sus divisores propios, que son aquellos distintos de él mismo. Un ejemplo es 6, cuyos divisores propios son 1, 2 y 3, que suman $1 + 2 + 3 = 6$; otro es $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. ¿Existen infinitos números perfectos? ¿Hay alguno que sea impar? Resulta intrigante que aún no podamos satisfacer la curiosidad de nuestros antepasados de hace tantos siglos, pero también la importancia que estas y parecidas cuestiones aritméticas desempeñan ahora en la seguridad de las comunicaciones de nuestro mundo contemporáneo.

Los pitagóricos, como hemos apuntado antes, tuvieron la idea revolucionaria de que los números están detrás de la explicación profunda de todos los fenómenos del universo, y se dedicaron a investigar sus propiedades. Representándolos por medio de piedras (cálculos) sobre la arena, encontraron muchas sucesiones notables, tales como:

- La sucesión (T_n) de los números triangulares, cuyos primeros valores son 1, 3, 6, 10, 15… y cuyo término general es $T_n = n(n+1)/2$:



- La sucesión de los números cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25…, cuyo término general es n^2:



Y muchas otras. Pero avancemos en el tiempo hasta 1672 y fijémonos en Leibniz, que era entonces un joven abogado en visita diplomática a París, con la misión de convencer a Luis XIV para que cejase en sus proyectos de invadir territorios alemanes. Allí conoció a Huygens, recién nombrado director del Observatorio Astronómico, quien le propuso el problema de evaluar la suma de los recíprocos de los números triangulares,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} .$$

Leibniz lo resolvió con la sencilla observación de que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

por lo que la suma pedida es

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 \times \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right] = 2 .$$

Conseguir esa solución tan simple, pero al mismo tiempo tan ingeniosa, afectó tanto al joven Leibniz que le indujo a cambiar sus planes de vida, y dedicar una buena parte de su tiempo a las matemáticas. Lo que le llevó a codescubrir el cálculo infinitesimal y a ejercer una profunda influencia en su desarrollo posterior a través de una serie de notables matemáticos, entre los que cabe citar a los hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Precisamente Jakob, el mayor de los Bernoulli, se obsesionó con la suma de los recíprocos de los cuadrados. Pero fue Euler, antiguo discípulo de su hermano Johann, quien obtuvo su valor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad .$$

Resulta pues que la suma de los recíprocos de los números cuadrados involucra al número π, la razón de la longitud de cualquier circunferencia a su diámetro, esa constante que los griegos clásicos supieron detectar, pero que no fue bien aproximada hasta varios siglos después, cuando el gran Arquímedes obtuvo sus primeras cifras decimales: $\pi = 3{,}14159\ldots$ La irracionalidad de π fue demostrada rigurosamente por Lambert, un contemporáneo de Euler, pero hubo que esperar al año 1882 para que Lindemann probara su trascendencia, es decir, que no es raíz de una ecuación polinómica cuyos coeficientes sean todos enteros. Y de esta manera conocimos finalmente que no es posible construir, con regla y compás, un cuadrado de área igual al círculo de radio unidad. Es decir, la solución del famoso problema de la cuadratura del círculo formulado por aquellos maravillosos griegos de la época de Pericles.

Que los cuadrados de los enteros se relacionen con el número π a través de esa identidad de Euler es algo tan misterioso que casi todas las generaciones de matemáticos posteriores a él han producido su propia interpretación y demostración. Sin ir más lejos, el autor de este ensayo obtuvo una prueba especialmente directa y sencilla, publicada en *La Gaceta* de la RSME en el año 2001. Pero la demostración que dio Euler es una joya que muestra el talante de aquella época prodigiosa, y la maestría insuperable de su autor en el arte de obtener las cancelaciones ocultas que permiten sumar muchas series numéricas. Euler relacionó la serie de los recíprocos de los cuadrados con la sucesión de los números primos a través de su celebrado producto infinito de la función zeta:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1},$$

donde el producto designado por el símbolo Π involucra a un factor por cada número primo: p = 2, 3, 5, 7, 11,…

Supo calcular también los valores que toma la función zeta en los enteros pares. Empero, la naturaleza racional o irracional de los valores que alcanza en los impares siguen siendo *terra incognita*, excepto por el caso de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, que ahora sabemos que es un número irracional, como demostró R. Apéry en el año 1978. Tras Euler vino Riemann, quien extendió la función zeta al cuerpo de los números complejos y describió todo un proyecto de investigación que aún nos tiene ocupados: ¿dónde estarán los ceros no triviales de la función zeta? ¿Acaso se sitúan todos en la recta vertical de abscisa 1/2? Se trata de otra versión de la «hipótesis de Riemann», ese gran objeto del deseo de los matemáticos del siglo XXI.

En los finales del siglo XIX y en los comienzos del XX, el proyecto de entender la naturaleza de los números reales, racionales e irracionales, y tratar con los cardinales infinitos, que llevó a G. Cantor a desarrollar la teoría de conjuntos de puntos, y el empeño de Frege de establecer los fundamentos lógicos de la aritmética reduciéndola a la teoría de conjuntos convergieron en diversos forcejeos con «el infinito», que dieron lugar a diversas paradojas y a una sonada crisis de los fundamentos de la que surgió una nueva visión de las matemáticas, sin la que no sería concebible la moderna teoría de la computación y carecería de sentido escribir un ensayo en torno al centauro que forma un matemático con su ordenador. La saga de los números contiene pues muchos capítulos fascinantes, que han llamado la atención de escritores, como es el caso de Jorge Luis Borges, quien encontró en la metáfora de la iteración infinita, o en la inmensidad del continuo, la inspiración para algunos de sus más intrigantes relatos, tales como «La Biblioteca de Babel» o «El Aleph». Pero también en la teoría de Cantor encontramos reminiscencias del problema pictórico de si es o no es posible representar el espacio tridimensional en el plano del cuadro, y del llamado efecto Droste, o de repetición infinita, así llamado por el anuncio de una caja de chocolates en la que aparece el dibujo de una camarera que porta una bandeja en la que hay depositada una caja de chocolates en la que una camarera… El sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel, que surgió de la crisis de los fundamentos antes aludida, comienza postulando la existencia del conjunto vacío. Pero eso nos lleva a la mística, a San Juan de la Cruz y a sus seguidores, los quietistas, entre quienes encontramos al aragonés Miguel de Molinos, quien interpretando la Biblia llegó a la conclusión de que si Dios creó el mundo de la nada, entonces el primer acto de la creación debió ser precisamente «crear la nada», que es una manera de interpretar el primer postulado de las matemáticas: «existe el conjunto vacío». Antonio Machado lo expresó en un bello poema: «Dijo Dios "Brote la nada". / Y alzó la mano derecha / hasta ocultar su mirada. / Y quedó la Nada hecha».

Miguel de Molinos escribió una interesante *Guía espiritual* desarrollando sus teorías quietistas, pero de sus postulados, para su infortunio, dedujo «teoremas» muy curiosos y avanzados para su época, como el que afirma que entre el alma y el cuerpo no hay comunicación, de manera que lo que el cuerpo haga no afectará a la salud de su alma. Este y otros parecidos teoremas le hicieron muy popular en la Roma de su tiempo, convirtiéndolo en un auténtico líder espiritual para muchos romanos y romanas; pero eso fue su perdición, por cuanto acabó procesado por la Inquisición y murió preso en Santa María Supra Minerva, cerca de la sede de los jesuitas. En fin, también en la vida, como decían los pitagóricos, encontramos abundantes números.

Consideraciones finales

El origen de esta colección de ensayos en torno a las matemáticas está en un ciclo de conferencias propiciado por el Colegio Libre de Eméritos que impartí en Madrid durante el mes de junio de 2012. Su título fue también el de un «Maratón de matemáticas» que dirigí en el Museo de la Ciencia de Madrid hace algunos años, y que tuvo un gran éxito de asistencia, con personas que se desplazaron desde ciudades próximas a la capital para participar en una jornada en la que, durante toda una tarde, varios investigadores presentaron de manera asequible a los ciudadanos los resultados y los objetivos de sus trabajos. Y el de una conferencia dada en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo (UIMP) dentro del programa Ortega y Gasset de 2007, dirigido a estudiantes brillantes del último curso del bachillerato. En la UIMP impartí también un curso magistral en el año 2002 bajo el título «Matemáticas: orfebrería de ideas y leyes de la naturaleza», que me obligó a ordenar mis pensamientos y preparar un material que he utilizado ahora en la elaboración de estos ensayos. Igualmente he hecho un uso generoso de algunos artículos que había publicado en la revista *Saber Leer* de la Fundación Juan March, como es el caso del capítulo «Felipe II, el diablo y las matemáticas», aunque he ampliado bastante su extensión y la cantidad de los temas considerados. Otras publicaciones donde han aparecido reflexiones mías en torno a las matemáticas, y de las que serán también deudoras estas páginas, son el diario *El País*, y las revistas *Anthropos, Mètode* (de la Universidad de Valencia), *Caxitan* (Academia Alfonso X el Sabio, de Murcia), *Notícies* (Societat Catalana de Matemàtiques) y *La Gaceta* (de la Real Sociedad Matemática Española).

Los capítulos sobre la enseñanza, la investigación o el mencionado «Felipe II, el diablo y las matemáticas» sobre las relaciones entre las matemáticas y la política contienen mis reflexiones personales sobre estos temas, y están basadas, en gran parte, en todas estas experiencias y en las anécdotas más significativas que las rodearon. Pero también en mi colaboración con los equipos del Ministerio de Educación y Ciencia de aquellos años, quienes recababan mi presencia, como matemático de referencia, en las comisiones de evaluación de proyectos (Comisión Asesora), de cambio de los nombres de las cátedras y áreas de conocimiento y de los sexenios de investigación.

En cuanto al ensayo sobre la pintura, se trata de una osadía que es producto de mi afición al arte y de ser un asiduo visitante de los museos de Madrid, pero también a la sorpresa que me produjo, hace ya de esto bastante tiempo, descubrir las semejanzas que tenían con los cuadros suprematistas de Malévich los dibujos de mis cuadernos de estudiante de doctorado, cuando intentaba demostrar la conjetura de Zygmund y resolver el problema de Kakeya.

El capítulo titulado «Un centauro contemporáneo» desarrolla las ideas apuntadas en un artículo que publiqué en *El País* acerca de la solución de la conjetura de Kepler y que posteriormente elaboré en un número de la revista *Anthropos.* El ensayo sobre las matemáticas de la vida cotidiana tiene su origen en unas lecciones impartidas por diversos institutos madrileños a propósito de que el 2000 fuese declarado por la Unesco «Año mundial de las Matemáticas».

La obra de Ramanujan, Tartaglia, Cardano, Abel, Galois y Grothendieck, así como las vicisitudes de sus vidas, son un contrapunto romántico al espíritu de la Ilustración invocado a lo largo de este libro. Muestran dos maneras distintas de obtener resultados: a partir de ejemplos especialmente significativos, como Ramanujan, o bien rodeándolos de una teoría donde sean meros corolarios de teoremas de una generalidad extrema, a la manera de Grothendieck. La historia de ese objeto del deseo que fue resolver ecuaciones, a la babilonia, que culmina en Abel y Galois con el descubrimiento de la importante noción de grupo de transformaciones y que inaugura el estructuralismo matemático, nos enseña cómo, también en matemáticas, lo importante no siempre es lograr el objetivo, sino gozar de lo que encontramos por el camino.

Finalmente, la glosa de la tesis de Riemann desarrollada en el último capítulo fue una conferencia dada en la Universidad Politécnica de Cataluña dentro del acto de clausura del año dedicado a la figura de Riemann. Aunque exija del lector una mayor motivación que los anteriores capítulos, me ha parecido conveniente añadirla, por cuanto en esa tesis se encuentra el embrión de muchas teorías importantes que son mencionadas en otras partes del libro, tales como los «transfinitos» de Cantor, los fractales o las sutilezas lógico-matemáticas y sus relaciones con los ordenadores y la teoría de la computación. Pero conviene hacer notar que el nivel de este capítulo es diferente, algo más elevado que el de los anteriores, que pretenden ser asequibles a todo bachiller. Y aunque un lector interesado pueda apreciar leyéndolo el genio de Riemann y seguir el planteamiento de los problemas tratados en su famosa tesis, no debe preocuparse, sin embargo, si algunos de los conceptos y desarrollos matemáticos introducidos le llevan lejos de su territorio conocido.

Llama también la atención, en estos tiempos en los que tanto se publica, que Riemann no enviase su tesis a ninguna revista. Quizás debido a su insatisfacción por lo que no había logrado demostrar, que le impedía publicar los magníficos resultados que sí había obtenido. En ese aspecto Riemann es un caso muy notable, por cuanto sus obras completas ocupan tan solo unos pocos cientos de páginas. Aunque cada uno de sus artículos revolucionó un área de las matemáticas y sus intuiciones dieron lugar, y todavía lo siguen dando, a resultados fundamentales.

Es evidente que sin los estímulos recibidos del Colegio Libre de Eméritos, la UIMP, el Museo de la Ciencia de Madrid, *Saber Leer* y *El País*, yo no hubiese roto la inercia de mi dedicación habitual a la investigación y la docencia universitaria y este libro no existiría. Pero su versión final sería también inconcebible sin la ayuda de Irene Quintero y de Pablo Fernández, quienes leyeron la primera versión e hicieron oportunas y sabias sugerencias, y la editaron con esmero.

1.
Matemáticas entre lo cotidiano

Un matemático debe ser más útil que cualquier otro miembro de su tribu.

Proverbio chino

Invisibilidad

Vivimos inmersos en un mar de números: efemérides personales y sociales, documentos nacionales de identidad, cuentas bancarias, porcentajes de infectados por el virus de la gripe, tasas de inflación, prima de riesgo, estadísticas de parados, intereses y descuentos, etc., son algunos ejemplos de esta realidad numérica cotidiana.

La naturaleza nos ofrece por doquier formas bellas de un rico contenido geométrico, tales como las espirales de las caracolas, de las margaritas y de las piñas, la geometría fractal de la coliflor o del brécol romanesco, y la perfección de los minerales cristalizados. Pero también las encontramos en el arte: los mosaicos de la Alhambra, la perspectiva del Renacimiento, el cubismo, el puntillismo, los grabados de Escher o la pintura de Vasarely, por citar algunos ejemplos; a los que podríamos añadir otros muchos de la pintura, la escultura, la arquitectura y la ingeniería: los cuadros de Palazuelo, las esculturas de Alfaro, los edificios de Calatrava o los puentes de Manterola, si es que deseamos mencionar algunos de los más significativos realizados en España.

Nuestra salud y nuestro bienestar dependen de técnicas que involucran gran cantidad de métodos y algoritmos matemáticos. En los hospitales se diagnostica diariamente la existencia de tumores por medio de la Tomografía Axial Computarizada (TAC). El paciente apreciará seguramente la destreza de los médicos y las enfermeras que le atienden, y es posible que también valore la tecnología avanzada de las máquinas de rayos X, producto del ingenio de físicos e ingenieros. Sin embargo, resulta menos habitual que sepa que los cálculos realizados por el ordenador están basados en profundas teorías matemáticas, que convierten en imágenes nítidas de los tejidos los datos numéricos sobre la pérdida de intensidad de los rayos que los atraviesan.

Los discos compactos están dotados de un algoritmo aritmético de corrección de errores, que es el responsable de que sigan sonando bien incluso después de ser rayados. Los códigos de barras, que tanto facilitan la elaboración de la cuenta en nuestras compras diarias, están basados en la aritmética modular y en la representación binaria.

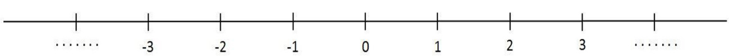
Si alguien pregunta por la fecha de redacción de estas líneas, podríamos responderle que se trata del jueves 10 de mayo de 2012. Pero causaríamos sorpresa a la parroquia si dijésemos que es el día 131 del año 2012, y bastante más si, haciendo uso de los ordinales, respondemos que es el cuatromilésimo quingentésimo décimocuarto día del tercer milenio, o un número aún mayor si tomamos como origen de los tiempos la fundación de Roma o la Gran Explosión. Ahora bien, el modo habitual de expresar la fecha involucra una aritmética sofisticada: si el día 10 de mayo es jueves, sabemos que el próximo jueves será el 17 y el siguiente el 24, y así sucesivamente. Entre dos jueves siempre habrá comprendido un número exacto de semanas, o un número de días que ha de ser necesariamente múltiplo de siete. Los siete días de la semana se corresponden con los siete restos distintos (desde 0 hasta 6) que se obtienen al dividir por 7. De manera que algo tan cotidiano como es la determinación de la fecha nos remite a una ingeniosa aritmética modular.

De forma similar, el cómputo de los meses se hace con el módulo 12 (mayo de 2012 podría ser también descrito como el mes 149, o el centésimo cuadragésimo nono mes del tercer milenio), mientras que para las horas utilizamos el módulo 24. La aritmética modular ha sido desde el siglo XVII, y continúa siendo, un tema central de las matemáticas, aunque durante la mayor parte de este tiempo su estudio ha estado motivado por la mera curiosidad humana hacia su belleza intrínseca. Desde hace unas décadas, sin embargo, se han encontrado importantes aplicaciones nuevas al «mundo real», como son la manera de almacenar la información en los DVD antes mencionada, o la transmisión de grandes cantidades de datos por satélite sin que apenas se produzcan errores.

¿Por qué los depósitos de agua caliente de nuestras casas o las bombonas de butano tienen formas redondeadas, próximas a una esfera, mientras que los radiadores de calefacción presentan múltiples pliegues y recovecos? ¿Cómo funciona el GPS? ¿Cómo se hacen los cálculos para dosificar un medicamento? ¿De qué manera llegan a nuestros conocidos las fotografías que enviamos por el teléfono móvil? ¿Cómo se previene y controla la propagación de una epidemia? Resulta que las respuestas a todas estas preguntas involucran resultados y algoritmos matemáticos realmente ingeniosos y nada triviales.

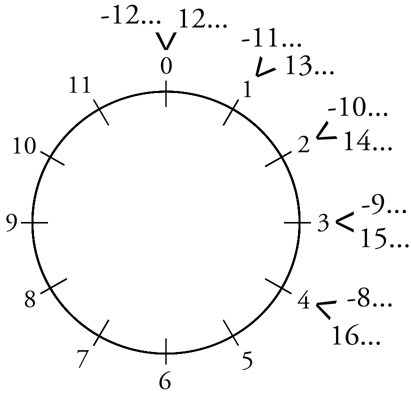
Aritmética modular

De acuerdo con la aritmética elemental que aprendimos en la escuela primaria, podemos visualizar los enteros representándolos por puntos uniformemente espaciados en una línea recta:



De manera que, por ejemplo, sumar 1 + 5 consiste en situarse en el 0 y viajar a la derecha, primero un espacio, y luego otros cinco para llegar a la posición 6; multiplicar 2 × 3 significa empezar también en el 0 y viajar dos veces seguidas tres espacios a la derecha, que es equivalente a hacerlo tres veces dos espacios.

En la aritmética modular, la línea recta es sustituida por una circunferencia. En el caso del módulo 12, que es relevante para contar los meses del año o las horas del día, la circunferencia se divide en doce partes iguales, designando a cada punto de separación con los números desde 0 hasta 11.



A cada uno de esos doce números le hemos asociado dos filas, una de enteros positivos y otra de negativos, que coinciden con él después de un número exacto de vueltas a la circunferencia. Con el convenio de que el signo positivo implica moverse en el sentido de las agujas del reloj, mientras que el negativo significa hacerlo en sentido contrario. Por ejemplo, las filas del 0 serían: …-24, -12, 0, 12, 24…; las del 1: …-23, -11, 1, 13, 25…; las del 7: … -17, -5, 7, 19, 31… etcétera.

La suma 5 + 9 módulo 12 se hace así: empezamos en 0 y recorremos primero 5 lugares, y luego continuamos otras nueve posiciones (en el sentido de las agujas del reloj) para terminar en la posición 2. Es decir: 5 + 9 = 2 módulo 12. Si lo que queremos es calcular el producto 4×7, partimos también de 0 y nos movemos 7 posiciones 4 veces seguidas (o 4 posiciones 7 veces seguidas), por lo que completaremos dos vueltas completas y llegaremos a la posición 4. Es decir: $4 \times 7 = 4$ módulo 12.

En el caso de un módulo general, m, el círculo se divide en m partes iguales a las que asociamos los números (restos) desde 0 hasta m-1. Resulta fácil convencerse de que toda identidad de la aritmética ordinaria se verifica automáticamente en la modular. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ implica $x^2 + y^2 = z^2$ módulo m, cualquiera que sea m.

Pero esta ecuación tiene una larguísima historia que todavía sigue fascinando a los aficionados, como puede comprobarse en el capítulo dedicado a la educación. Hace ahora unos 3 800 años los babilonios «escribieron» en una tableta de arcilla (tableta Plimpton 322) muchas de sus soluciones, tales como $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ (puesto que $3^2+4^2=5^2$); $x = 6$, $y= 8$, $z = 10$ ($6^2+8^2=10^2$); $x = 28$, $y = 45$, $z = 53$ ($28^2+45^2=53^2$); y muchas otras que describen las dimensiones de triángulos rectángulos de lados enteros, cuyos catetos serían x e y, mientras que z nos daría su hipotenusa.

Años más tarde los griegos supieron que existen infinitas soluciones, y encontraron una fórmula que está descrita en los *Elementos* de Euclides: todas las soluciones de esa ecuación son de la forma

$$x = \left(n^2 - m^2\right)\frac{p}{2}, \quad y = n\ m\ p, \quad z = \left(n^2 + m^2\right)\frac{p}{2}$$

donde m y n son enteros de la misma paridad tales que $n>m$, mientras que p es un entero arbitrario.

¿Qué ocurre si cambiamos la ecuación? Por ejemplo, si consideramos $x^2+y^2=3z^2$, y queremos soluciones distintas de la trivial $x = y = z = 0$.

Si hubiese una tal solución (x, y, z), entonces tendríamos infinitas de ellas sin más que multiplicar por el mismo número cada una de sus componentes. En sentido opuesto, si los tres números (x, y, z) tuviesen un divisor común d, entonces $(x/d, y/d, z/d)$ también sería solución. De estas consideraciones deducimos que de existir una solución (no trivial), tiene también que existir otra «primitiva», en la que sus componentes no tienen un divisor común mayor que la unidad.

Sea pues (x, y, z) una tal solución primitiva y observemos que la ecuación, considerada módulo 3 nos dice que $x^2 + y^2 \equiv 0$ módulo 3. Ahora bien, sólo hay tres elementos distintos en la aritmética módulo 3, a saber: 0, 1 y 2 cuyos cuadrados son 0, 1 y 1, respectivamente. La única manera posible de obtener 0 sumando dos números entre 0 y 1 es que ambos sean iguales a 0, y eso significa que tanto x como y tienen que ser divisibles por 3. Pero entonces la ecuación $x^2 + y^2 = 3z^2$ nos dice que también z ha de ser divisible por 3, en flagrante contradicción con nuestra hipótesis de que x, y, z carecen de divisores comunes. La única salida posible es concluir que la hipótesis de partida (existe una solución no trivial) es falsa y nuestra ecuación carece de ellas.

Se trata de un argumento muy notable, por cuanto habría que comprobar infinitos candidatos, uno por cada terna de enteros (x, y, z) para ir descartándolos uno por uno, en una tarea digna de Sísifo. Sin embargo, al utilizar la aritmética modular tenemos sólo un número finito, y pequeño en el caso del módulo 3, que podemos verificar uno por uno. No habiendo solución módulo 3, tampoco la hay en la aritmética ordinaria y, así de fácil, hemos resuelto un problema muy complicado *a priori.*

Este tipo de argumento funciona para muchas otras ecuaciones y justifica el interés que los matemáticos han tenido en desarrollar la aritmética del reloj. En algunos casos interesantes se le puede dar la vuelta, y hay un bello teorema que se debe a Hermann Minkowski y Helmut Hasse que dice que, si tenemos una ecuación cuadrática y homogénea (es decir, una suma con coeficientes enteros de monomios cuadráticos en varias variables), de manera que la ecuación tiene solución no trivial entre los reales, y también solución entera módulo m, para todo m, entonces tiene solución no trivial en la aritmética ordinaria. Cuando el grado se hace mayor el teorema deja de ser cierto, como muestra el «último teorema de Fermat». Pero, curiosamente, la demostración de este gran resultado también se beneficia de la aritmética modular.

Desde la Segunda Guerra Mundial la influencia de las matemáticas en la tecnología ha ido *in crescendo,* de manera que el tiempo de la alta tecnología es, en gran medida, el de la tecnología matemática. Ahí están los ordenadores, pero también el diseño de aviones como el Airbus, de buques o de los modernos sistemas de comunicación, todos ellos basados en sofisticados programas matemáticos que, cuando no se les presta la atención debida, o no son usados correctamente, pueden producir desastres; como ocurrió con el reciente hundimiento de una planta petrolífera en el Mar del Norte, debido a que los ingenieros que la diseñaron no llevaron a cabo correctamente el análisis numérico de los esfuerzos que habían de soportar sus columnas. La seguridad de las comunicaciones (cifrado de mensajes) y el tratamiento de imágenes tienen también una importante base algorítmica.

Cabría deducir de estos y otros muchos ejemplos que las matemáticas son ubicuas y que así lo deberían percibir los ciudadanos. Sin embargo, no hay nada más alejado de la realidad, ya que generalmente ocurre todo lo contrario: pasan inadvertidas y resultan invisibles para la mayoría de sus usuarios.

¿A qué se debe esa invisibilidad? Hay muchas razones: en primer lugar, la divulgación de las matemáticas es una tarea intrínsecamente complicada. Cuando un físico, un químico o un ingeniero presentan sus trabajos a un público amplio procuran eliminar las ecuaciones para concentrarse en las imágenes y en las descripciones más o menos metafóricas. Es decir, la divulgación científica y tecnológica significa, en gran medida, la supresión de las matemáticas en los distintos modelos. El público recibe con cierta frecuencia información sobre agujeros negros, *quarks,* expansión del universo o el ahora célebre bosón de Higgs. De manera que a través de las revistas que están a la venta en los quioscos, o incluso en la prensa diaria, podemos tener noticia, por ejemplo, de esos componentes «últimos» de la materia llamados *quarks,* que están dotados de propiedades que han recibido nombres tan sugestivos como *arriba, abajo, color* y *encanto.* Pocos sospechan, sin embargo, que haya una rica estructura matemática detrás y, mucho menos, que esta constituyera el principal motivo de su hallazgo: desde los comienzos de su construcción los grandes aceleradores produjeron nuevas partículas que reclamaban teorías que las explicaran. ¿De qué manera podemos entender su masa, su carga o su espín? La respuesta dada por los físicos depende de una estructura matemática llamada el grupo SU(3): por razones que se remontan al empeño de resolver las ecuaciones algebraicas de grado mayor o igual a cinco, y al estudio de las simetrías geométricas, los matemáticos habían desarrollado la teoría de los grupos y de sus representaciones. En el caso del grupo SU(3), se observó que estas se correspondían con las partículas atómicas, tales como protones o neutrones, pero también que podrían construirse todas ellas a partir de unas representaciones fundamentales, y así nacieron los *quarks.* El paso siguiente fue la construcción de poderosas y costosísimas máquinas para observarlos experimentalmente, y cuyos éxitos y avatares aparecen con frecuencia comentados en los medios.

Los físicos, que forman un colectivo mucho más influyente que el de los matemáticos, han tenido un éxito notable en divulgar estas historias entre el público, que ve en ellas la presencia de la ciencia física, pero no de las matemáticas, que permanecen invisibles en la oscuridad.

Mala imagen

Otra razón importante del desenfoque social de las matemáticas radica en la enseñanza. Se trata de la ciencia que desempeña un papel más decisivo en el entrenamiento y desarrollo racional del cerebro humano, por lo que, desde hace siglos, forma parte sustancial del currículo docente en sus niveles primario y secundario. Pero ahí nos encontramos con un problema. Parece ser que una parte nada desdeñable de los ciudadanos salieron algo asustados de la experiencia y, durante el resto de sus vidas, asocian las matemáticas no precisamente con la búsqueda de la verdad y de la belleza, con el instrumento más adecuado para entender las leyes de la naturaleza, o con los algoritmos que hacen funcionar muchos de sus utensilios domésticos, sino más bien con una especie de tortura espiritual. Y como quiera que muchos de estos niños asustados logran tener éxito en sus profesiones y gozan de una cierta influencia social, contribuyen luego a perpetuar el estereotipo del profesor de matemáticas hosco y malhumorado, que proporcionó infelicidad a muchos días de la infancia por su insistencia en enseñar conocimientos abstrusos e inútiles. Así lo hizo el rector de una importante universidad española, en el acto de apertura de un congreso de la Real Sociedad Matemática Española celebrado en su universidad en el año 2000, cuando tuvo a bien informar a la concurrencia de que había sido calificado con un cero en Matemáticas en el examen de reválida de bachillerato. Dicho en un tono distendido, incluso jocoso, parecía un acto de sutil venganza demostrarnos fehacientemente a todos los allí reunidos cómo es posible llegar a ser excelentísimo y magnífico señor rector, e incluso administrar un gran presupuesto, a pesar de haber sido incapaz, aunque fuese a los quince años, de resolver un sencillo problema. Ejercicio que, probablemente, tan solo involucraría la solución de una ecuación de segundo grado que ya sabían resolver los babilonios de hace treinta siglos. ¿Podemos imaginarnos el caso de un rector que inaugurase un congreso de lingüistas confesándoles que suspendió la reválida por sus muchas faltas de ortografía?

La literatura y el cine nos proporcionan con frecuencia ejemplos de estos tristes lugares comunes. Las matemáticas suelen tener mala prensa. Los medios de comunicación les dan, casi siempre, un tratamiento pintoresco, poniendo el énfasis en sus aspectos más exóticos y periféricos. Una tontería demasiado generalizada consiste en asociarlas con la habilidad para efectuar cálculos enrevesados, aunque triviales, como hacía el personaje autista que representaba Dustin Hoffman en la película *Rain Man.* Entre nuestros artistas y hombres de letras abundan también quienes contribuyen a la perpetuación de esa imagen de disciplina abstrusa y aburrida, considerando de buen gusto, en artículos periodísticos, entrevistas y tertulias radiofónicas, hacer ostentación pública de sus desconocimientos matemáticos y proclamar ignorancias que sonrojarían a cualquiera si de su contrapartida literaria se tratara. En «El ordenador novelista» (*El País,* 3-XII-99) el gran escritor Francisco Ayala afirmaba lo siguiente: «Debo reconocer en efecto que entre las cualidades innatas de que carezco se encuentra en lugar preeminente el talento matemático. Nunca en la escuela primaria, donde se nos hacía recitar la tabla de multiplicar, logré retener en la memoria sino los primeros versículos de la cantinela […] Sin osar envidiarlos, uno admiraba aquellos casos asombrosos del señor que se sabía de memoria los números premiados de la lotería de quién sabe cuánto tiempo atrás […] Ahora, estas asequibles calculadoras que todo el mundo adquiere y maneja pueden realizar al instante las operaciones más difíciles, más complejas; con lo cual —es cierto— se ha descuidado el cultivo académico de la destreza matemática, aunque, eso sí, siga habiendo algún memorión dispuesto a exhibir la extravagancia de recitar sin falta los resultados de los partidos de fútbol, desde hace tiempos remotos».

Relacionar el talento matemático con la cantinela de la tabla de multiplicar, o con la facultad de recordar los números premiados de la lotería, es una ligereza equivalente a la de afirmar la falta de dotes literarias de una persona, no por ser incapaz de escribir poemas como Juan Ramón Jiménez o novelas como Gabriel García

Márquez, sino por no poder recitar de memoria las conjunciones del castellano o por no recordar los nombres y apellidos del listín telefónico. El desarrollo de las computadoras no ha contribuido a descuidar el cultivo académico de la destreza matemática. Por el contrario, ha dado lugar a desarrollos importantes en teorías consideradas clásicas y ha originado otras nuevas, por cuanto problemas que antes resultaban inabordables por la magnitud de los cálculos involucrados son ahora asequibles con la ayuda del computador; y del ingenio humano, capaz de elaborar sutiles estrategias para intentar resolverlos.

La barrera del idioma

> *La expresión vaga permite al que la oye hacerse una idea aproximada de qué es lo que le agrada y lo que en definitiva opina. La rigurosa, en cambio, contrae una obligación con la univocidad de la concepción, con el esfuerzo del concepto, que reclama del lector la supresión de los juicios corrientes respecto a todo contenido, exponiéndolo a un desamparo al que enérgicamente se resiste. De donde el rechazo o el vacío que suele rodear a quien se empecina en el rigor de la expresión.*
>
> T. W. Adorno

Suele decirse que la cortesía de los matemáticos reside en la claridad y en la precisión. Entre otras razones porque en su dilatada historia han desarrollado un idioma y un estilo de presentación, sobrios y precisos, que no excluyen una cierta belleza pero que están alejados de los modos más barrocos, aunque a menudo algo caóticos, de otras disciplinas. Sin embargo representan una barrera, a menudo insuperable, para quien carezca de cierto entrenamiento en el manejo de los símbolos, de los modos de razonamiento y de la terminología adecuada: una especie de montaña inaccesible, de cuestas empinadas y canchales ariscos. Pero cualquier explicación matemática llevada a cabo fuera de ese lenguaje puede, y a menudo suele, contener imprecisiones. La experiencia aconseja ser muy precavido a quien ose intentarlo, procurando declarar *a priori* que tan solo se pretende comunicar una versión impresionista de los conceptos e ideas, en la que se omitirán seguramente algunos detalles y salvedades.

Un ejemplo notable es la razón áurea, o divina proporción, que aparece en algunas novelas, pero también en tratados de arte y de botánica, y que suele representarse con la letra griega φ. Según la leyenda, en honor de Fidias, cuyas esculturas seguían ese canon: en ellas la razón de la altura de la figura humana a la de su ombligo era precisamente φ. Proporción que, al parecer, también encontramos en la Venus del cuadro de Botticelli, en las dimensiones del Partenón, las conchas del nautilo o las espirales de diversas variedades de piñas, girasoles y margaritas. La literatura en torno a φ y a la sucesión asociada de Fibonacci es muy abundante, y podríamos llenar muchas páginas con resultados, historias y leyendas. Pero en algún momento habrá que precisar quién es ese número tan afamado; y la mejor manera de hacerlo es a través del lenguaje de las matemáticas. Resulta que se trata del número irracional

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033987\ldots$$

una de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$ (o, lo que es lo mismo, de $x = 1 + 1/x$), siendo la otra $\left(1-\sqrt{5}\right)/2$, que es el opuesto de su recíproco, es decir, $-1/\varphi$.

Ahora bien, la ecuación nos proporciona una herramienta poderosa para conocer a φ. Por ejemplo, escribiendo

$$\varphi = 1+\frac{1}{\varphi} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \ldots$$

que codifica la fracción continua $\varphi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1\ldots]$, que a su vez produce la siguiente sucesión de convergentes $P_n/Q_n = \left(1, 2/1, 3/2, 5/3, \ldots\right)$:

$$1,\ 2 = 1+\frac{1}{1},\ \ \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{1+1/1},\ \ \frac{5}{3} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1/1}}\ \ldots$$

que están relacionadas con la famosa sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$, aquella que verifica la ley de recurrencia siguiente:

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para cada} \quad n \geq 2,$$

y cuyos primeros valores son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… De ahí la expresión $P_n / Q_n = F_{n+1} / F_n$

Se trata de una muestra sencilla, pero muy notable, del poder del idioma de las matemáticas. A partir del desarrollo en fracción continua [1; 1, 1, 1…] se infieren algunas propiedades interesantes y sorprendentes de la divina proporción. Por ejemplo: entre todos los números irracionales, φ es el que peor se aproxima por racionales, lo que es una propiedad curiosa que se merece una explicación, aunque esta nos llevará quizás demasiado lejos de lo cotidiano:

Digamos que todo número x puede ser aproximado tanto como queramos por números racionales p/q, como muestran precisamente los números decimales. Ocurre, no obstante, que «el precio» de esas aproximaciones crece con el tamaño del denominador q, por lo que fijado un número $N > 0$ surge la pregunta: entre todas las fracciones de denominador $q \leq N$, ¿cuál es la que está más próxima al número x? Resulta que la respuesta está íntimamente relacionada con el desarrollo «único», en fracción continua $x = [x_0; x_1, x_2, x_3, \ldots]$ cuyas convergentes

$$p_0 = x_0,\ \frac{p_1}{q_1} = x_0 + \frac{1}{x_1},\ \frac{p_2}{q_2} = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2}}, \ldots$$

son candidatas idóneas para ser las fracciones que optimizan la aproximación. Pero resulta que la calidad de ésta mejora con el crecimiento de los cocientes parciales x_j , y eso explica que φ, cuya fracción continua es [1; 1, 1, 1, 1,…] , esté entre los números que peor se aproximan por racionales, hecho que es importante para entender los comportamientos de diversos sistemas dinámicos.

Pero existen también razones internas que contribuyen a esa mala imagen de las matemáticas y que dimanan de la naturaleza austera de la propia investigación, que implica la dedicación de muchas horas y energías a la solución de problemas complicados: lo difícil es lo único que cuenta, y para que un resultado merezca ser publicado en una revista de investigación ha de ser nuevo y relevante. No están permitidos los lugares comunes, aunque se hayan expresado bellamente. La recapitulación y puesta al día de un tema está reservada a quien haya contribuido sustancialmente a su desarrollo.

Una consecuencia es que la mayoría de los matemáticos solo escriben para que los lean sus colegas, y no existe una tradición establecida de comunicación entre los investigadores y la sociedad. De manera que los casos conocidos de destreza en las tareas de divulgación suelen echar mano de los aspectos más recreativos y lúdicos. Y si bien es cierto que el contenido de muchos juegos y pasatiempos puede ser matemáticamente interesante, ocurre, sin embargo, que poner un énfasis excesivo en ellos distorsiona, creo yo, el papel que las matemáticas desempeñan realmente en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana. De manera que en las revistas más populares que se dedican a la divulgación científica encontramos con frecuencia artículos de matemática recreativa, junto a otros de bioquímica que nos informan de los progresos en la lucha contra el cáncer o de física en torno a la evolución del universo.

A modo de ejemplo

> *El emperador Hui Tsung pintó con exquisito cuidado en el detalle una codorniz y un narciso. El pájaro y la flor no ocupan en la hoja del álbum el centro del espacio iluminado, sino el lugar de más ligera luz en la esquina derecha […] Señalar una esquina ya es bastante, según Hui Tsung sabía de Confucio. Para quienes no puedan hallar las otras tres, inútil fuera repetirse.*
>
> J. A. Valente

La continuación de este ensayo hace necesario presentar los detalles de algunos ejemplos fehacientes del uso de las matemáticas en la vida cotidiana. Con todas las salvedades mencionadas anteriormente, y aun a riesgo de que, una vez más, se haga realidad el adagio de que cada fórmula introducida en un escrito demedia el número de sus posibles lectores, habrá que hacer uso del lenguaje propio de las matemáticas para llevar a cabo esa empresa, aunque, eso sí, sin necesidad de usar matemáticas avanzadas. Afortunadamente la lista de esas aplicaciones cotidianas es muy larga e imposible de abarcar en este ensayo, aunque existen varias monografías publicadas en tiempos recientes que las introducen y analizan, por lo que solo cabe elegir una pequeña muestra. No obstante, la lectura de esta sección no es necesaria para la comprensión de los otros capítulos, de manera que aquel lector que no se sienta cómodo con las fórmulas puede obviarla sin más.

EL NIF

Con excepción de los más jóvenes, la mayor parte de los españoles aún recordará cuando el número anterior del documento nacional de identidad (DNI) pasó a denominarse NIF (Número de Identificación Fiscal) tras recibir el añadido de una letra. Lo que no es tan conocido es que esa letra no aporta ninguna información nueva, ya que está determinada por las cifras. Se trata, tan solo, de un método para detectar errores en la escritura del NIF.

Por razones que son fáciles de entender, las letras *I, O, Ñ* y *U*, además de los dígrafos *Ch* y *Ll,* no son usados en el NIF, quedándonos pues con las veintitrés letras restantes. El procedimiento de asignación de la letra es muy simple, y completamente análogo al que usamos para los días de la semana. Se trata de lo siguiente: la letra que corresponde a un número depende solo del resto (o residuo) obtenido al dividirlo por 23. Es pues un algoritmo módulo 23, que divide a los números enteros en veintitrés clases correspondientes a los restos, desde 0 hasta 22. De manera que dos números con el mismo residuo obtienen la misma letra. Por ejemplo, los números 22405224, 20128201 y 20105201 dan resto 4, por lo que pertenecen a la misma clase que, en este caso, resulta ser la de la letra *G*. He aquí algunos ejemplos de NIF:

24705454-G, 31628682-W, 27071247-V, 22497279-J, 29374223-A.

Primero calculamos el resto de dividir estos números entre 23:

$$
\begin{aligned}
24705454 &= 23 \times 1074150 + \mathbf{4}\\
31628682 &= 23 \times 1375160 + \mathbf{2}\\
27071247 &= 23 \times 1177010 + \mathbf{17}\\
22497279 &= 23 \times 978142 + \mathbf{13}\\
29374223 &= 23 \times 1277140 + \mathbf{3},
\end{aligned}
$$

para finalmente asignar la letra correspondiente buscando el número obtenido en la siguiente tabla:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

Para buscar el residuo correspondiente a la letra del DNI podemos utilizar también la tabla inversa:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	V	W	X	Y	Z
3	11	20	9	22	7	4	18	13	21	19	5	12	8	16	1	15	0	17	2	10	6	14

Los números quedan pues clasificados por sus letras. Dos números x e y tienen la misma letra si y solo si su diferencia es divisible por 23, es decir, si $x - y$ es un múltiplo exacto de 23; o bien si x e y dan el mismo resto al ser divididos por 23; lo que se suele escribir como

$$x \equiv y \pmod{23} .$$

Las clases de restos módulo 23 pueden sumarse y multiplicarse originando una aritmética modular:

$$\begin{cases} x \equiv y \pmod{23} \\ w \equiv z \pmod{23} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + w \equiv y + z \pmod{23} \\ x \cdot w \equiv y \cdot z \pmod{23} . \end{cases}$$

Un ejemplo:

$$\begin{cases} 25 \equiv 2 \pmod{23} \\ 8 \equiv 31 \pmod{23} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 25 + 8 \equiv 2 + 31 \equiv 10 \pmod{23} \\ 25 \times 8 \equiv 2 \times 31 \equiv 16 \pmod{23} \end{cases}$$

Dado que 23 es un número primo, podemos también dividir por cualquier clase distinta de la del 0: «para todo número x no congruente con 0, podemos encontrar un inverso multiplicativo módulo 23, es decir un número y tal que $xy \equiv 1$ módulo 23».

Se trata de una consecuencia de la llamada *identidad de Bézout*: «El máximo común divisor de dos números a y b es el entero positivo más pequeño que podemos escribir en la forma $ax + by$, con enteros x, y». Además, el algoritmo de Euclides provee un método efectivo de calcular los coeficientes x, y a través de divisiones sucesivas. En particular, si a y m son primos entre sí, su máximo común divisor es 1 y existen, por tanto, dos enteros x, y tales que:

$$1 = ax + my.$$

En otras palabras, x es un inverso multiplicativo de a módulo m: $ax \equiv 1$ módulo m.

Por ejemplo, 7, 3, 21, 9 y 17 son los inversos multiplicativos, módulo 23, de 10, 100, 1000, 10 000 y 100 000 respectivamente (por ejemplo $10 \times 7 = 70 = 23 \times 3 + 1$):

$10 \times 7 \equiv 1$ módulo 23,
$100 \times 3 \equiv 1$ módulo 23,
$1000 \times 21 \equiv 1$ módulo 23,
$10\,000 \times 9 \equiv 1$ módulo 23,
$100\,000 \times 17 \equiv 1$ módulo 23.

De manera que si alguien no se acuerda de la letra, pero sí del número, solamente tiene que dividirlo por 23 y buscar el resto de la división en las tablas anteriores. ¿Para qué sirve entonces la letra, si está determinada por el número? Como mencionamos antes, sirve para detectar errores y también para recuperar una cifra que haya quedado emborronada en la escritura del NIF.

Supongamos que leemos 27071&47-V y que querríamos saber cuál es el dígito emborronado &. Recordemos que la letra *V* corresponde al resto 17, por lo que si al número buscado & lo llamamos *d*, el NIF será de la forma: 27071d47-V, donde *d* tiene que ser un número entre 0 y 9.

Escribimos $27071d47 \equiv 27071047 + 100d \equiv 17$ módulo 23. Y como $27071047 \equiv 23 \times 1177002 + 1$, deducimos que $1 + 100d \equiv 17$, es decir, que $100d \equiv 16$ módulo 23. Como hemos visto hace un momento, 3 es el inverso multiplicativo de 100, de manera que $d \equiv 3 \times 16 = 48 \equiv 2$ módulo 23. Así que el número perdido era $d = 2$.

El método detecta si nos hemos equivocado en una cifra, por cuanto la diferencia entre el correcto y el erróneo no puede ser, en ese caso, un múltiplo de 23. También descubre otro tipo de error habitual, como es la transposición de dos cifras consecutivas. Pero si nos equivocamos en dos o más cifras, pudiera ocurrir que la diferencia entre lo correcto y lo erróneo fuera un múltiplo exacto de 23 y, en ese caso, nuestro detective fallaría, como muestra el caso de 31628682 y 31626382, que solo difieren en dos dígitos pero cuya diferencia, 2300 es múltiplo de 23. ¿Cuál es la probabilidad de que tal cosa ocurra si el error es cometido al azar? Un sencillo cálculo demuestra que es pequeña, pero no es cero. De manera que el método resulta seguro al cien por ciento solo para errores de una cifra o transposiciones. Por otro lado, si nuestro interés radica en hacer trampa, lo tenemos muy fácil: basta con sumar o restar un múltiplo de 23 y mantener la letra.

Algo pues tan cotidiano como es el NIF involucra una ingeniosa aritmética modular. Los enteros están clasificados en 23 clases de restos:

$[0] = \{\ldots, -69, -46, -23, 0, 23, 46, 69, \ldots\}$,
$[1] = \{\ldots, -68, -45, -22, 1, 24, 47, 70, \ldots\}$,
……………………
$[22] = \{\ldots, -47, -24, -1, 22, 45, 68, 91, \ldots\}$,

que pueden sumarse y multiplicarse por el sencillo procedimiento de escoger un elemento de cada clase y observar que la clase de la suma, o del producto, es independiente de los representantes que hayamos elegido. Además, el hecho de que 23 sea un número primo añade la riqueza extra de poder también efectuar la división exacta por una clase distinta de la del cero; lo que resulta ser decisivo, como se vio antes, para recuperar ese número que se nos había emborronado al escribir el NIF.

La asignación de las letras a los restos no sigue un patrón sencillo y cabría pensar que esa combinación añade algún tipo de seguridad al sistema (aunque en internet la encuentra fácilmente quien desee conocerla). De manera que podemos hacernos legítimamente la pregunta retórica: ¿cuántos NIF, elegidos al azar, son necesarios para descubrir la combinación con una probabilidad muy alta?

Podemos encontrar la respuesta a través de un modelo de urnas que nos sirve también para mostrar la utilidad de otras partes de las matemáticas, en este caso la teoría de la probabilidad, en algo tan cotidiano como el DNI. En una población tan extensa como la española, y teniendo en cuenta el procedimiento de asignación de los números del carnet de identidad, cada letra pertenece aproximadamente a 1/23 de la población, en el sentido de que las fluctuaciones sobre ese número son tan pequeñas que resultarían irrelevantes para el cálculo que deseamos realizar.

Consideremos pues una urna con veintitrés bolas iguales, numeradas desde el 0 hasta el 22. El experimento de escoger «al azar» M carnés de identidad puede ser modelado por el de efectuar M extracciones, con reposición, de las bolas de nuestra urna.

La probabilidad de no extraer una cierta bola es:

- en una extracción 22/23;
- en dos extracciones: $22/23 \times 22/23 = (22/23)^2$;
- …
- en n extracciones: $(22/23)^n$.

¿Cómo calcular el número $(22/23)^n$? La estrategia obvia de hallar 22^n y 23^n para luego dividirlos resulta del todo inadecuada, incluso para los ordenadores muy potentes, en cuanto el número n sea un poco grande. Sin embargo, ya los matemáticos de la Ilustración supieron cómo realizar esa cuenta, al menos de manera aproximada:

$$\left(\frac{22}{23}\right)^n = \left(1-\frac{1}{23}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{23}\right)^{23}\right]^{n/23} \simeq \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n/23}$$

donde $e = 2{,}7182\ldots$ Es decir, ¡qué maravilla!, nos encontramos con uno de los caracteres más importantes de las matemáticas, el número e, que es el límite de la sucesión $(1 + 1 / n)^n$ o la suma de la serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

De manera que la probabilidad de *no encontrar* la combinación inspeccionando n NIF elegidos al azar cumple que:

$$P_n = \text{Prob(no encontrar la clave en n extracciones)} \leq 23 \times \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n/23}$$

La tabla siguiente recoge algunos valores de esta cantidad:

n	$n/23$	P_n
92	5	42/100
138	6	5/100
184	8	1/1000

De manera que la probabilidad de descubrirla será de un 58% para $n = 92$, de un 95% para $n = 138$; y de un 99% si inspeccionamos $n = 184$ NIF al azar.

El balón de fútbol

La esfera, en su materialización balompédica, tiene difícil parangón como objeto lúdico universal, tanto para los que disfrutan con la práctica del deporte, como para los millones de aficionados e hinchas de sus respectivos equipos. Desde la aparición del modelo Azteca, en el campeonato mundial celebrado en México, y luego el Tango en el de Argentina, los balones de fútbol se aproximan bastante bien a una esfera perfecta a través de una estructura formada por pentágonos y hexágonos, unidos por aristas comunes.

Francia, 1938

España, 1982

Entre las características del balón, destacan las siguientes:

- Está compuesto por 20 hexágonos y 12 pentágonos.
- Según la FIFA, ha de tener un diámetro comprendido entre 21,6 y 22,3 cm.
- Debe pesar entre 410 y 450 gramos.
- Su presión ha de estar comprendida entre 1,6 y 2,1 atmósferas.

Pero quizás pase inadvertido que se trata de una estructura muy interesante desde el punto de vista de su geometría. Las abejas construyen muy eficientemente sus panales con celdas hexagonales, resolviendo un problema complicado: de entre todas las maneras de enlosar un plano de manera periódica, es decir, con una losa que se repite por traslaciones, el enlosado hexagonal resulta ser el más eficiente respecto a la relación perímetro/área. Los centros de los hexágonos son también los del empaquetamiento más denso del plano con círculos de igual radio.

Panal de abejas

Cristal de hielo

A la vista de los panales de las abejas, parece legítimo preguntarse: ¿por qué los pentágonos del balón de fútbol? Pues bien, resulta que son del todo imprescindibles. Podríamos, si quisiéramos, fabricar un balón con más o menos hexágonos, incluso sin ninguno, pero los doce pentágonos son imprescindibles: ¡tienen que estar allí!

La explicación se encuentra en una fórmula maravillosa que descubrió Leonhard Euler y que cumplen todos los poliedros, como es el caso del balón de fútbol.

La fórmula dice así:

$$C+V-A=2,$$

donde C es el número de caras del poliedro, V el número de vértices, y A el número de aristas.

En el balón de fútbol, si llamamos H al número de hexágonos y P al de pentágonos, tenemos que:

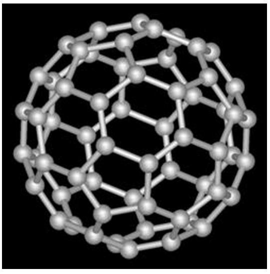
$$C=H+P, \qquad V=\frac{6H+5P}{3}, \qquad A=\frac{6H+5P}{2},$$

de manera que la ecuación:

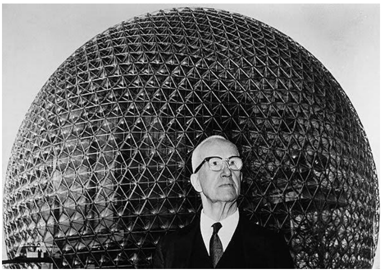
$$H+P+\frac{6H+5P}{3}-\frac{6H+5P}{2}=2$$

implica que ¡$P = 12$!

Siguiendo el famoso adagio de que la naturaleza imita al arte, en este caso al balón de fútbol, el premio Nobel de Química del año 1996 fue otorgado a Carl, Kroto y Smalley por el descubrimiento de una nueva molécula de carbono, en la que sesenta átomos de este elemento se disponen según los vértices del balón. Esa estructura, C-60, está teniendo una influencia muy considerable en la química, y ha dado lugar a toda una serie de estados del carbono, denominados *fullerenos* en honor del arquitecto Buckminster Fuller, quien es famoso por sus cúpulas metálicas.



Fullereno



Buckmister Fuller

La lotería de Navidad

En el mejor de los escenarios, las loterías constituyen un sistema de recaudar impuestos entre las clases menos favorecidas, pero también son a veces un método efectivo de blanquear dinero, como muestran esos casos de caracteres muy dudosos a quienes les tocan grandes premios con demasiada frecuencia. Ante la perplejidad de los ilustrados, el Estado suele animar a la ciudadanía a jugarse sus dineros en diversos sorteos, siendo la lotería de Navidad el más popular en España:

En el Gordo del año 2011 se jugaron en total 100 000 números, desde el 0 hasta el 99 999. De cada número se emitieron 195 *series*. Cada billete (identificado por su número y su serie) se dividía a su vez en diez *décimos*; cada décimo se identifica por la *fracción*.

En el sorteo del año 2011, el precio de cada décimo fue de 20 euros, el de un billete, 200 euros, y el de un número completo, 200 × 195 = 39 000 euros. El total de la emisión fue de 39 000 × 100 000 = 3900 millones de euros, que se distribuyeron de la manera siguiente: un 70% para premios, un 8% para gastos, y el restante 22% (858 millones de euros) para el Tesoro.

Bombos de la lotería

Se supone que el sorteo es limpio y profesional, por lo que la probabilidad de cada número es 1/100 000. De acuerdo con las cifras anteriores, por cada diez euros jugados se pierden tres en promedio, que da una media de pérdidas de seis euros por cada décimo de veinte. Luego, en promedio, cuanto más se juegue, más se pierde. Aunque eso no es precisamente lo que la propaganda nos transmite cada mañana del sorteo, cuando aparecen en la pantalla de los televisores la alegría y la juerga de los afortunados con el Premio Gordo. Existen diversas supersticiones: por ejemplo, hay quien prefiere los números grandes a los pequeños porque, dicen, estos son menos probables. Se trata del error de confundir la probabilidad de un número, que es siempre la misma 1/100 000, con la del suceso de que el Gordo tenga pocas o muchas cifras: la probabilidad de que el Gordo tenga tres cifras es

$$P = \frac{900}{100000} = 0,9\%\ ,$$

mientras que la probabilidad de que el Gordo tenga cinco cifras es:

$$P = \frac{90000}{100000} = 90\%$$

Sin embargo tenemos que la probabilidad que tiene de salir un número concreto es siempre la misma, e independiente de su número de cifras:

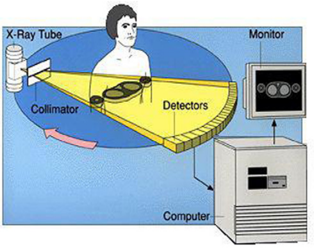
$$P(\text{Gordo} = 100) = \left(\frac{0,9}{100}\right) \times \left(\frac{1}{900}\right) = \frac{1}{100000},$$

$$P(\text{Gordo} = 12345) = \left(\frac{90}{100}\right) \times \left(\frac{1}{90000}\right) = \frac{1}{100000}.$$

Otra superstición consiste en creer que será más probable ganar si compramos en una administración de lotería famosa por los premios que recibe. Ocurre que esa superstición incrementa enormemente sus ventas, por lo que aumenta también la probabilidad de que el premio se haya vendido allí, pero disminuye la de que sea el que nosotros hayamos comprado en esa administración afortunada. Mis compañeros del Departamento de Matemáticas conocen todas estas cuentas y saben que jugar a la lotería es una manera de tirar el dinero. No obstante, cada año se adquiere un número en el Departamento y la mayoría insiste en participar, pero no tanto por la esperanza de ganar, que saben que es muy pequeña, sino por el temor de quedar al margen en el caso improbable de que el resto fuese bendecido por la fortuna. Se trata de un riesgo que casi nadie quiere asumir. Pero es un punto muy interesante dentro de la teoría de la utilidad: un comportamiento ilustrado conllevaría conocer hasta qué punto a uno le molesta perder los veinte euros que vale un décimo y cuánto le alegraría la vida obtener el premio, cuantificar de alguna manera razonable esas sensaciones y sopesarlas con sus respectivas probabilidades, para luego comparar el cálculo con el disgusto que nos produciría el no haber jugado los veinte euros y que nuestros colegas, sin embargo, celebraran su buena fortuna. Pero claro, esto también puede aplicarse a otros órdenes de la vida, por ejemplo en el arte amatorio: cuál es la probabilidad de que me diga que no… ¡y cuánto va a sufrir mi ego en el envite! Y claro está, cuál es la de que me diga que sí, ¡y cuánto voy a celebrarlo! Conociéndose a uno mismo, las matemáticas nos pueden ayudar a tomar decisiones razonables que aseguren un promedio de éxitos y minimicen el impacto de nuestros fracasos.

Tomografía axial computarizada (TAC)

Se trata de una técnica médica que usa rayos X para obtener imágenes de tejidos blandos, con fines diagnósticos. El problema análogo para los tejidos duros, es decir, los huesos, tiene una solución mucho más fácil por cuanto son ostensibles en las radiografías, de manera que desde que Röntgen descubrió los rayos X, estos fueron utilizados por los traumatólogos. Pero el caso de los tejidos blandos es más difícil, porque la variación de la intensidad de los rayos que atraviesan es infinitesimal, haciendo necesarios unos instrumentos muy sutiles y poderosos que puedan apreciarla para precisar las variaciones de densidad del tejido que indican la presencia de un tumor.



Esquema del TAC

Un aparato TAC consta de un anillo en el que se introduce al paciente, un emisor de rayos X, un receptor y un ordenador que procesa los datos obtenidos por el receptor. Las matemáticas del TAC se deben al austriaco Johann Radon (1887-1956), y son anteriores a los aparatos de rayos X y a los ordenadores que hacen los cálculos. Los primeros prototipos de máquinas TAC fueron diseñados por los ingenieros médicos Allan M. Cormack y Godfrey Hounsfield. El modelo matemático es el siguiente.

Llamamos

- $\rho = \rho(x)$ a la densidad del tejido;
- E_i a la energía inicial (salida del emisor);
- E_f a la energía final (llegada al receptor).

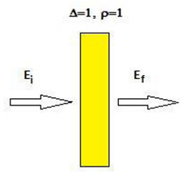
Entonces

$$\ln\left(\frac{E_f}{E_i}\right) = -\kappa \int_L \rho(x)\,dx$$

donde «ln» designa el logaritmo natural o neperiano, y $\int_L \rho(x)\,dx$ es la integral de la densidad del tejido en la trayectoria L del rayo.

¿De dónde viene la fórmula? Digamos que al pasar una banda de anchura $\Delta = 1$ y densidad $\rho = 1$, la energía se atenúa en un factor c:

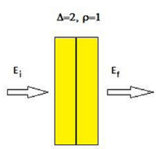
$$\frac{E_f}{E_i} = c < 1$$



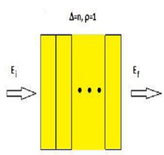
Si iterando el proceso lo extendemos al caso de densidad y anchura variables:

Para densidad fija, anchura variable:

$$\frac{E_f}{E_i} = c^2$$

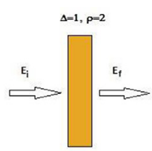


$$\frac{E_f}{E_i} = c^n$$

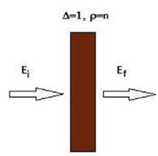


Para densidad variable, anchura fija:

$$\frac{E_f}{E_i} = c^2$$

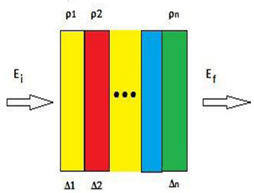


$$\frac{E_f}{E_i} = c^n$$



En el caso general:

$$\frac{E_f}{E_i} = c^{\rho_1\Delta_1+\ldots+\rho_n\Delta_n}$$



de donde

$$\ln\left(\frac{E_f}{E_i}\right) = \ln(c).(\rho_1\Delta_1 + \ldots + \rho_n\Delta_n) \approx \ln(c)\int_L \rho(x)\,dx \ ,$$

usando el lenguaje del siglo XVII introducido por Leibniz y Newton, donde la integral aparece precisamente como un límite de esas sumas.

Nos encontramos aquí con un objeto matemático sumamente interesante, llamado transformada de Radon en honor a su descubridor,

$$\rho \to T(L,\rho) = \int \rho,$$

que asigna a una «densidad» ρ la integral a lo largo de los distintos rayos L. Lo que el aparato TAC nos da es precisamente el valor $\int_L \rho(x)\,dx$ para cada rayo L, y lo que se trata es de discernir si de esa información podemos obtener la densidad del tejido $\rho(x)$, para luego dibujar su imagen. El teorema de Radon nos dice que sí podemos hacerlo: la densidad ρ está unívocamente determinada por $T(L,\rho)$, y de eso se hace uso en los hospitales todos los días.

2.
Pintura y matemáticas en los museos de Madrid

En el umbral de la belleza, el arte y la ciencia han de colaborar.

Edgar Varèse

Madrid es una ciudad privilegiada para gozar de la pintura, no solamente en sus tres grandes museos, el Prado, Thyssen y Reina Sofía, sino también en los de menor envergadura: Lázaro Galdiano, Romántico, Bellas Artes…, y en las exposiciones de las fundaciones Juan March, Mapfre, BBVA o del Canal, entre otras, que organizan todos los años exhibiciones muy interesantes. Cualquier persona con sensibilidad puede disfrutar de una oferta rica y variada, a la que se pueden añadir otros eventos, como son la celebración de ARCO o las exposiciones de las distintas galerías de arte ubicadas en la ciudad. Visitar esos lugares puede servir de estímulo a un matemático, induciéndole a reflexionar acerca de la conexión e influencia mutuas que su ciencia y la pintura han mantenido a lo largo de los tiempos. Si se trata de un investigador, lo más probable es que su trayectoria profesional le haya llevado por otras ciudades dotadas de centros matemáticos de excelencia, pero que poseen también magníficas pinacotecas, tales como Nueva York (Metropolitan, MoMA), Chicago (Art Institute), París (Louvre, Orsay), Amsterdan (museos de Rembrandt y Van Gogh), Londres (National Gallery), Viena (Kunsthistorisches, Leopold, Palacio del Belvedere), Florencia (galería Uffizi) o San Petersburgo (Hermitage). No obstante, en lo que atañe a mi caso particular, de mero aficionado al arte, conviene aclarar de antemano que todos los comentarios que ose hacer sobre pintura deben ser tomados siempre con precaución y benevolencia.

Ambos, pintor y matemático, tratan con la estructura del espacio y del universo, con su geometría y las conexiones entre sus partes constituyentes, por lo que han originado preguntas tales como: ¿puede ser representado el espacio tridimensional en el plano del lienzo?; el artista o el matemático, ¿crea o descubre?; ¿existió el cubismo antes de Picasso y Braque?; ¿es el mundo continuo o discreto? O desafíos intelectuales como: el descubrimiento de la perspectiva en pintura y de la geometría proyectiva en matemáticas; la ruptura del punto único de vista por los cubistas; la tensión entre lo discreto y lo continuo, números enteros o números reales, teoría de conjuntos en las matemáticas, puntillismo o divisionismo en la pintura; los lemas de recubrimiento y el teorema fundamental del cálculo, el neoplasticismo de Mondrian y el suprematismo de Malévich, etc. Son ejemplos que permiten ahondar en la rica relación que han mantenido siempre estas dos disciplinas y que Guillaume Apollinaire describe tan explícitamente en sus *Meditaciones estéticas*: «La mayoría de los pintores nuevos están haciendo matemáticas sin saberlo o sin saberlas […] Se ha reprochado enérgicamente a los pintores nuevos sus preocupaciones geométricas. Sin embargo, las figuras geométricas son la esencia del dibujo. La geometría, ciencia que tiene por objeto la extensión, su medida y sus relaciones, ha sido siempre la regla misma de la pintura».

A la línea

A ti, contorno de la gracia humana,
recta, curva, bailable geometría,
delirante en la luz, caligrafía
que diluye la niebla más liviana.

A ti, sumisa cuanto más tirana,
misteriosa de flor y astronomía,
imprescindible al sueño y la poesía,
urgente al curso que tu ley dimana.

A ti, bella expresión de lo distinto,
complejidad, araña, laberinto
donde se mueve presa la figura.

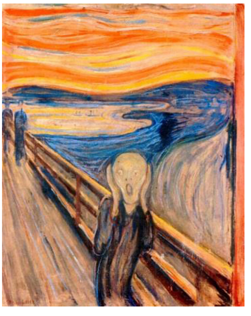
El infinito azul es tu palacio.
Te canta el punto ardiendo en el espacio.
A ti, andamio y sostén de la pintura.

Rafael Alberti

Kandinsky, en su opúsculo titulado *Punto y línea sobre plano* y en otros muchos de sus escritos, buscó desarrollar una teoría de la pintura en la que distintas configuraciones geométricas y diferentes colores tienen sus correspondientes sentimientos y emociones: líneas ascendentes, descendentes, convergentes o divergentes pueden expresar, según Kandinsky, distintos estados de ánimo. En pintura se da la oposición entre lo figurativo y lo abstracto, que entre nuestros artistas españoles actuales representan tan bien, respectivamente, Antonio López y Pablo Palazuelo. Pero con bastante frecuencia el espacio pintado en el cuadro es tan solo un instrumento para enmarcar sensaciones y sentimientos. Cualquiera que haya contemplado el magnífico retrato que Goya hizo de Jovellanos, y que se encuentra en el Museo del Prado, habrá podido apreciar que lo más importante de ese lienzo no está en la perfección de la perspectiva geométrica, sino en la melancolía y la expresión de cansancio que el artista puso en la faz del ilustrado, seguramente producidos por la época, los sucesos y el país que le había tocado vivir. Otro ejemplo notable es *El grito* de Munch, especialmente famoso en estos tiempos por los varios intentos de robo de que ha sido objeto, pero en el que la geometría del puente, con su barandilla, está completamente supeditada al concepto abstracto del horror que tan bien transmite la esquemática pero contundente figura del cuadro. En matemáticas coexiste la geometría euclídea con las no euclídeas, pero también los espacios «abstractos», cuyos puntos pueden ser objetos muy complicados y cuyas relaciones y operaciones constituyen el objeto de análisis y estudio.

Tensión suave,
W. Kandinsky

Gaspar Melchor de Jovellanos,
F. Goya



El grito,
E. Munch

«El jardín de las delicias»

El jardín de las delicias, de El Bosco, que se encuentra en el Museo del Prado desde el año 1939, pero que fue pintado en torno al año 1500, es un magnífico ejemplo que sirve para ilustrar la transición del espacio medieval de la pintura al descubrimiento de la perspectiva en el Renacimiento, hecho este que representa un momento álgido en la interacción entre las matemáticas y el arte. Pero eso no basta, claro está, para hacer justicia a tan espléndida obra, cuya influencia en surrealistas y simbolistas resulta, por lo demás, tan evidente. El Bosco demostró que los métodos de la pintura medievales, que habían evolucionado permitiendo representar el mundo de forma más realista, podían ser usados en direcciones insospechadas y transmitirnos aspectos de la humanidad que nadie había observado anteriormente.

El jardín del Edén

El jardín de las delicias

El infierno

El cuadro fue adquirido por Felipe II en 1551 a la familia del duque de Alba, quien lo había confiscado en una de sus numerosas campañas militares. Es un tríptico pintado sobre madera de roble cuando su autor, Hieronymus Bosch, tenía entre cuarenta y cincuenta años de edad. En la tabla situada a la izquierda vemos una escena del paraíso en la que Dios parece presentar una desnuda Eva a un expectante y también desnudo Adán. La segunda, la tabla mayor del conjunto, ofrece un amplio panorama de figuras humanas desnudas en múltiples posturas lascivas. En su centro se halla la «cabalgata de la libido» alrededor de la fuente de la eterna juventud, en la que se bañan mujeres que tienen sobre sus cabezas pavos (la vanidad) y cuervos (la incredulidad), junto a otros animales fantásticos y diversas frutas. Ha sido interpretada de distintas maneras: desde una lección de moral medieval, donde la sexualidad y la lujuria son la evidencia de la pérdida de la gracia divina y el más pernicioso de los pecados capitales, hasta, por lo contrario, pasar a ser una descripción de las bondades y dulzuras del paraíso perdido. En cuanto al panel situado a la derecha, se trata de una panorámica del infierno en el que están representados varios instrumentos musicales (por lo que a veces se le llama infierno musical) y diversos medios de tortura, pero dentro de un mundo «casi real» que contiene escenas de la vida cotidiana. *El jardín de las delicias* es una joya de la pintura que ya fascinó a Felipe II, quien lo mandó instalar en su alcoba de El Escorial.

Las figuras son auténticas miniaturas preciosistas y están ubicadas de manera que su tamaño aumenta de arriba a abajo en la disposición del cuadro, otorgándole un cierto sentido de profundidad que lo aleja de la representación medieval, en la que el tamaño de las figuras estaba principalmente en correspondencia con su importancia, pero sin llegar a la perspectiva renacentista. De manera que el espacio es una colección de cartas locales distintas, pegadas, sin embargo, con una solución de continuidad local y generando un universo abigarrado y unas escenas múltiples, concentradas en entornos de dimensiones reducidas. Llama la atención que los dos primeros paneles compartan la línea del cielo a pesar de representar mundos tan distintos.

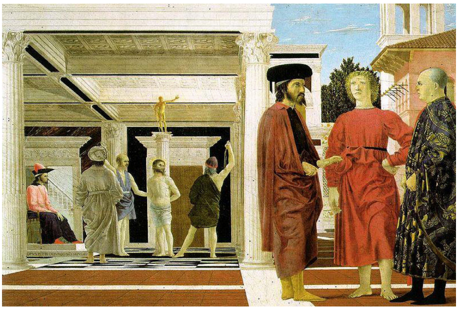
Tintoretto: «El lavatorio»

Este extraordinario lienzo de grandes dimensiones, 210 × 523 cm., fue encargado originalmente para la iglesia veneciana de San Marcuola pero, tras diversas vicisitudes, se encuentra ahora ubicado en una de las salas centrales del Museo del Prado, adonde llegó adquirido por los agentes de Felipe IV en la subasta de bienes llevada a cabo en Inglaterra tras la ejecución de su rey, Carlos I, durante la revolución de Cromwell. El cuadro fue pintado en 1547 por Jacopo Comin, el Tintoretto, uno de los más conspicuos miembros de la escuela veneciana que incluye también al Veronés, Giorgione, Tiziano y Palma el Viejo.

El lavatorio, Tintoretto

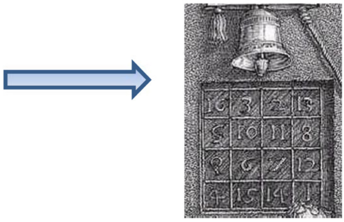
La escena bíblica es de sobra conocida: se trata de los preámbulos de la Última Cena y Cristo lava los pies a sus discípulos, quienes aparecen distribuidos en el cuadro en diferentes posturas, algunas grotescas, quitándose los calcetines, y otras en posición más digna, como las que se adoptan en el grupo de la derecha del cuadro, donde están Cristo, San Pedro y San Juan. La arquitectura que aparece en el fondo es majestuosa, quizás algo pomposa siguiendo el gusto veneciano de entonces y, junto con el magnífico enlosado de octógonos y rombos, constituye todo un emblema de la nueva forma de pintar inventada en el Renacimiento, es decir, «la perspectiva», cuyo nombre deriva del latín *item perspectiva*, que significa 'mirar a través'. La apariencia un tanto deslavazada que muestra el cuadro cuando es mirado desde un punto situado en la perpendicular a su centro desaparece si nos situamos a la derecha, pues allí está el punto de mira. Si partiendo ahora de ese lugar nos movemos mirando al enlosado, observaremos como este, y en general todo el cuadro, gira acompasado con nosotros hasta llegar al otro extremo, desde el que también se percibe una cierta unidad en la composición. La línea del horizonte se encuentra a mitad de altura del arco que aparece en el fondo y allí, naturalmente, convergen las líneas de fuga que señalan las columnas, la mesa o el enlosado.

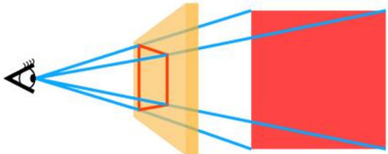
Pero esa terminología, *punto de vista, línea del horizonte* y *puntos de fuga,* fue creada precisamente por aquellos genios del Renacimiento, entre los que sobresale Piero della Francesca, cuya obra titulada *La flagelación de Cristo* está universalmente considerada como el ejemplo perfecto de esa, por entonces, nueva manera de pintar.



La flagelación de Cristo, P. della Francesca

Además de afamado artista, Piero fue un teórico cuya obra *De prospectiva pingendi* explicaba el nuevo método, pero fue también un buen matemático que escribió *Trattato dell´abaco* y *Libellus de quinque corporibus regularibus*. Alberto Durero es otro de los grandes pintores de esa época que contribuyó, en varios de sus grabados, a divulgar la buena nueva de la perspectiva. El titulado *Melancolía* es especialmente citado cada vez que se relacionan las matemáticas con la pintura, porque Durero introdujo un cuadrado mágico en su composición.





Melancolía, A. Durero

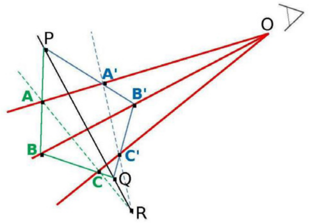
Perspectiva

La imagen pintada es una proyección del original en el lienzo, estando situado el centro de la proyección en el ojo del pintor. Todas las líneas de profundidad se encuentran pues en ese punto de vista y el cuadro es el «resultado» de la intersección del plano del cuadro con el cono visual, formado por las líneas que unen el punto de vista con los objetos representados. Las paralelas, sea cual sea su orientación, se unen en su punto de fuga situado en la línea del horizonte, es decir sobre la horizontal que pasa por el punto intersección de la perpendicular al cuadro trazada desde el punto de vista. El método fue perfeccionado y potenciado con el paso del tiempo, por ejemplo, introduciendo también la perspectiva en la dirección vertical, perspectiva aérea, o usando simultáneamente varios puntos de vista, pero tuvo un éxito fulminante: cambió la manera de pintar, y se convirtió en el canon para muchos siglos venideros.

En este proceso pictórico, tanto las longitudes como los ángulos sufren distorsiones, dependiendo del punto de vista o de la posición del plano del cuadro. A pesar de ello la escena original resulta siempre muy reconocible en la pintura de todo buen pintor. Podemos pues preguntarnos legítimamente por la razón de ese éxito y ahí viene, precisamente, la contribución de matemáticos como

Gérard Desargues y Blaise Pascal, primero, o Brianchon y Poncelet después, y de tantos otros que crearon una nueva geometría, llamada proyectiva, tratando de explicar ese interesante fenómeno pictórico. Estamos pues ante un caso claro de antelación de la pintura a la ciencia, planteando cuestiones que dieron lugar a una nueva manera de ver el mundo, ya que de la geometría proyectiva derivaron luego con Gauss, Bolyai y Lobachevski las geometrías no euclídeas y de ahí podríamos continuar fácilmente hasta la teoría de la relatividad general, que está en la base de nuestra visión cosmológica contemporánea.

Se trata de una historia conocida que ha sido analizada con detalle por muchos autores pero que ilustra muy bien, creo yo, el estilo y el modo de hacer de los matemáticos. Desargues consideró un objeto geométrico muy sencillo, como es el triángulo, y se preguntó qué es lo que tienen en común todos los triángulos perspectivos. El resultado fue un lindo teorema: la proyección de un triángulo de vértices *ABC* desde un punto de mira *O* es el triángulo *A´B´C´* si, y solo si, las rectas que contienen a lados correspondientes se cortan en puntos alineados.



Que al prolongar los lados correspondientes *AB* y *A´B´* se corten en un punto *P*, *AC* y *A´C´* en *R*, y *BC* y *B´C´* en *Q*, es algo sencillo de ver por cuanto cada una de esas parejas de rectas es coplanaria y la única excepción posible, que fuesen paralelas, significa, en este nuevo lenguaje geométrico, que se cortan en el infinito. De manera que la expresión del teorema resulta consistente con toda generalidad. Pero lo sorprendente es que los tres puntos *P*, *Q* y *R* yazcan en una misma línea recta del espacio y que, además, esa sea también una razón suficiente para que los dos triángulos de partida estén en perspectiva.

Además de Desargues, también Pascal y luego más tarde Brianchon y Poncelet, entre otros, desarrollaron el método, obteniendo resultados muy interesantes que han dado lugar a ese magnífico edificio intelectual que es la geometría proyectiva. En la perspectiva, las líneas rectas del espacio se transforman en rectas, pero las distancias y los ángulos, en general, no se conservan, sino que aparecen distorsionados. Ocurre, no obstante, que sí se conserva la razón doble de cuatro puntos alineados, es decir el cociente:

$$(A,B,C,D)=\frac{CA/CB}{DA/DB}$$

De manera que si tenemos otra cuaterna de puntos situados en una misma recta, A', B', C', D', y queremos saber si estos últimos pueden ser la imagen de los cuatro primeros por una proyectividad, basta con comprobar que dos números coinciden, es decir, que ambas cuaternas tienen la misma razón doble.

Encontrar otros invariantes proyectivos se convirtió en un objeto del deseo de los matemáticos de entonces, que llevó, siglos más tarde, a la formulación abstracta de la geometría que encontramos en el famoso «Programa de Erlangen» de Felix Klein: el espacio es ahora cualquier conjunto en el que se haya definido un grupo de transformaciones, siendo la búsqueda de los invariantes la principal tarea de los geómetras. De manera que, en cuanto a la abstracción, las matemáticas fueron muchos años por delante de la pintura. Un hito fue la tesis de Riemann presentada para su doctorado (*privatdozent*) en la Universidad de Göttingen en el año 1850. Según Riemann, una superficie es un conjunto (abstracto) dotado de un atlas, o conjunto de cartas locales, cada una de las cuales es un mapa plano de un trozo de la superficie, pero que están pegadas entre sí por transformaciones que permiten pasar de una carta a otra de forma continua, diferenciable o lineal a trozos, según sea la categoría de las funciones que dispongamos. En el caso de superficies concretas (inmersas en el espacio tridimensional, como dicen los geómetras) tales como la esfera o la superficie de un neumático (el popular *donut*), se trata de algo que ya venían haciendo los cartógrafos: el mapamundi tradicional consta de dos círculos en los que se representan, respectivamente, los dos hemisferios terrestres. Aunque la proyección en cada hemisferio no tenga que ser necesariamente una proyectividad del Renacimiento, podríamos, no obstante, imaginarnos que un pintor situado fuera de la Tierra lleva al lienzo la intersección de su cono visual, pintando un mapa plano de la región abarcada. Empero, para cartografiar toda la Tierra serán necesarios dos o más cuadros con sus particulares puntos de vista, como también lo son para hacer lo mismo con la superficie de un neumático u otras de más complicada geometría.

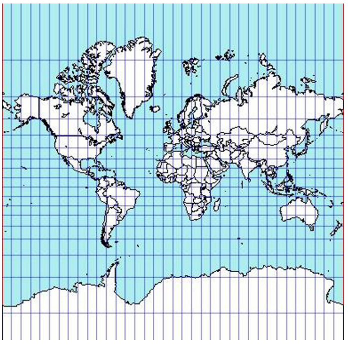
El cubismo, quizás el movimiento pictórico más revolucionario de comienzos del pasado siglo, tuvo sus orígenes en Francia a partir de la obra de Pablo Picasso y Georges Braque, quienes propusieron una ruptura con el método renacentista tradicional, y tuvieron enseguida seguidores de la talla de Juan Gris, María Blanchard o Fernand Léger. La palabra cubismo, quizás no demasiado afortunada, parece que fue popularizada por el crítico de arte Louis Vauxcelles tras ver el boceto y escuchar la descripción que Henri Matisse hizo de un cuadro de Braque (*Maisons de l´estaque*), en la que usó el término de *bizarreries cubiques*. En su obra titulada *Los pintores cubistas* (1913), Guillaume Apollinaire escribe lo siguiente: «Un pintor como Picasso estudia un objeto de manera análoga a como un cirujano disecciona un cadáver […] Al imitar planos para representar volúmenes, Picasso hace de los diversos elementos que componen los objetos una enumeración tan completa y aguda que en absoluto adquieren figura de objeto gracias al trabajo de los espectadores, que perciben a la fuerza la simultaneidad, sino en razón de su propia distribución». Apollinaire hizo grandes esfuerzos por transmitir la esencia del cubismo, entendió que las figuras eran observadas desde varios puntos de vista, que cada mirada nos transportaba a una región del cuadro, aunque no necesariamente de una forma lineal o proyectiva, y que estas se enlazaban entre sí de maneras más o menos bellas e ingeniosas. En varios de sus escritos parece tener presente el concepto matemático de *variedad*, pero no poseerlo le hace escribir varias páginas de circunloquios a su alrededor. Es quizás un concepto difícil, pero su posesión me parece que ayuda a entender el cubismo y hace innecesarias muchas de las páginas que se han escrito para describirlo. Explica también, creo yo, por qué la pintura cubista es mucho más interesante que la escultura. En el Museo Reina Sofía se hallan varios cuadros cubistas de Pablo Picasso *(Los pájaros muertos, Cabeza de mujer llorando con un pañuelo),* de Georges Braque *(Botella y fruta)* y de Juan Gris *(Guitarra ante el mar, Ventana abierta, La mesa del músico).* El Thyssen también posee una importante colección y en ambos museos, durante los años pasados, se han celebrado diversas exposiciones de pintura cubista.

Los pájaros muertos, P. Picasso

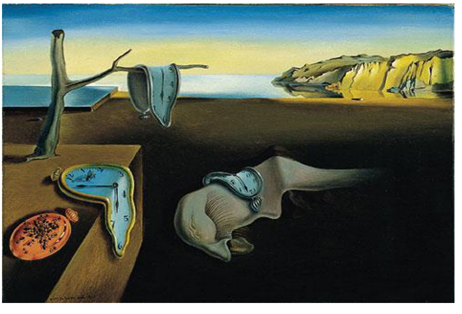
Botella y fruta, G. Braque

Guitarra ante el mar, J. Gris

Cuenta la leyenda que el gran matemático Élie Cartan, contemporáneo de los primeros cubistas, empezó una conferencia con la siguiente frase: «El concepto de variedad es muy difícil. Sea M una variedad diferenciable […]». Pero como señalamos antes, los cartógrafos ya se habían adelantado elaborando los mapamundi en forma de dos círculos planos, uno para cada hemisferio, que bien podríamos considerar ahora como los primeros cuadros cubistas de la Tierra. La navegación marina exigió mapas en las que las loxodromias, o líneas de rumbo constante, se correspondieran con rectas y eso, precisamente, es lo que ocurre con la proyección de Mercator, en la que las distancias se distorsionan cuando nos acercamos a los polos, pero sí se preservan los ángulos. ¿Podemos representar una región esférica en el plano de manera que se conserven las distancias y los ángulos? La respuesta es que eso no es posible, y la dio Gauss en el siglo XIX con su celebrado «teorema egregio», en el que introdujo el concepto de *curvatura.* De manera que todo plano de la Tierra produce siempre una distorsión, en longitudes, en ángulos o en ambos a la vez, cuya magnitud disminuye con el tamaño de la región representada, como muy bien saben los cartógrafos. A veces, no obstante, los pintores prefieren agrandar la distorsión para aprovechar las impresiones estéticas que el fenómeno origina, como hizo Salvador Dalí en *La persistencia de la memoria,* pintando sus celebrados relojes blandos.



Mapa de Mercator



La persistencia de la memoria, S. Dalí

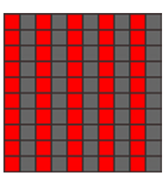
El puntillismo o divisionismo, encuadrado dentro de las corrientes neo-impresionistas anteriores al cubismo, resulta también un movimiento pictórico muy interesante por sus connotaciones matemáticas. En líneas generales se trata de una manera de pintar basada en el uso de pequeños toques de color puro, yuxtapuestos en el cuadro de tal forma que, mirados desde una cierta distancia, se mezclan en el ojo del espectador creando tonos de una portentosa luminosidad. Su principal creador, Georges Seurat, se basó en los trabajos y escritos científicos de Michel Chevreul, Ogden Rood y David Sutter, quienes escribieron acerca de la percepción del color y observaron que si colocamos juntos dos colores y luego los miramos desde lejos lo que veremos es un tercer color distinto. *Un domingo por la tarde en la Grande Jatte* es seguramente el cuadro de Seurat más emblemático de esta singular manera de pintar, que cuenta también con Paul Signac y Vincent van Gogh entre sus más conspicuos cultivadores. En el Thyssen encontramos *El puente de Waterloo*, que es una magnífica obra de André Derain, de un estilo indudablemente *fauve,* pero de factura puntillista, y que nos muestra una vista del antiguo puente de Waterloo en cuyo fondo se ven las chimeneas de los edificios industriales y una imagen borrosa del Parlamento inglés. En la línea del horizonte encontramos el motivo principal de la composición: el puente pintado de forma puntillista, con una pincelada de pequeños toques cuadrados, en un color azul brillante, que resalta los otros azules, verdes y morados que dominan en el cuadro.

El puente de Waterloo, André Derain

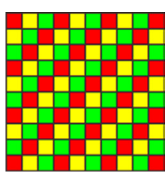
Contemporáneo de los puntillistas fue Georg Cantor, quien partiendo de la tesis de Riemann sobre la unicidad de las series trigonométricas, desarrolló la teoría de conjuntos e introdujo los conceptos de *puntos de acumulación, frontera* e *interior,* así como la noción de *conjunto infinito* y de *abierto* o *cerrado.* En el empeño de definir el cardinal de un conjunto estudió las correspondencias o funciones entre dos conjuntos A y B, que podían ser inyectivas, cuando elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B; sobreyectivas, cuando todo elemento de B es imagen de uno de A; y finalmente biyectivas o biyecciones, cuando tienen ambas propiedades a la vez, de manera que todo elemento de B es imagen de uno, y solo uno, de A. La cuestión clásica de la pintura acerca de la posibilidad de representar el espacio tridimensional en el plano del cuadro pudo precisarse, siguiendo a Cantor, en la forma siguiente: ¿existe una biyección entre los puntos del espacio y los puntos del plano? Para sorpresa general, resultó que la respuesta es afirmativa: tanto el espacio tridimensional, como el plano, o incluso la misma recta, tienen el mismo cardinal, es decir, podemos establecer una correspondencia biyectiva entre ellos. Se trata de una consecuencia sencilla de un interesante teorema probado por Cantor: «Si existe una aplicación inyectiva del conjunto A en B, y otra de B en A, entonces A y B son biyectables». En el caso de que A sea el intervalo semicerrado [0,1) de la recta, y B el cuadrado semicerrado [0,1) × [0,1) del plano, resulta muy fácil encontrar una aplicación inyectiva del primero en el segundo, a saber: la que lleva el punto de coordenada t del intervalo en el punto de coordenadas $(t, 0)$ del cuadrado. La otra es algo más misteriosa y podemos describirla usando los desarrollos decimales: llevamos el punto (s, t) del cuadrado cuyas coordenadas tienen respectivamente los desarrollos decimales $s = 0, s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ y $t = 0, t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots$ al punto del intervalo dado por $0, s_1 t_1 s_2 t_2 s_3 t_3 s_4 t_4 \ldots$ El argumento puede extenderse con facilidad a cualquier número de dimensiones, por lo que si la pregunta de los pintores es interpretada en estos términos, su respuesta es claramente afirmativa: es posible representar el espacio tridimensional en el plano a través de una biyección. No obstante si queremos que puntos próximos del espacio estén representados en puntos próximos del plano y viceversa, lo que en términos matemáticos se expresa diciendo que la biyección sea continua, entonces la cosa cambia radicalmente y la respuesta es negativa.

Pero se trata de un profundo teorema topológico sobre la invariancia de los dominios, cuya demostración fue obtenida unos cincuenta años después de las observaciones de Cantor. De manera que aquí, a diferencia del cubismo, sí puede afirmarse legítimamente que la pintura se adelantó a las matemáticas.

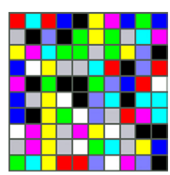
El uso de los ordenadores, que nos ha familiarizado con la noción de píxel, nos permite mirar ahora el puntillismo y las teorías de Cantor de manera más familiar. Supongamos que el cuadro es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ que dividimos en un retículo de cuadrados más pequeños (píxeles). Por ejemplo, en 100 cuadrados de lado 1/10, que numeramos de izquierda a derecha y de arriba abajo. Supongamos también que hemos establecido una paleta de colores, de manera que diez colores (si es que deseamos trabajar con el sistema decimal) se corresponden con los diez dígitos: 0, blanco; 1, rojo; 2, amarillo; 3, verde; 4, azul celeste; 5, azul ultramar; 6, añil; 7, violeta; 8, gris; y 9, negro. Podemos entonces pintar un cuadro eligiendo un número t al azar en el intervalo $[0,1]$ y escribiendo su desarrollo decimal $t = 0, t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots$: el primer píxel tendrá el color que corresponda al dígito t_1, el segundo vendrá dado por t_2, y así sucesivamente. Si el número t resulta ser racional, entonces su desarrollo decimal es muy previsible, ya que será periódico desde un lugar en adelante y nuestro cuadro exhibirá un patrón repetitivo. Resultará quizás algo tedioso, aunque eso dependerá del tamaño del denominador del número racional elegido. Por el contrario, si el número fuese irracional, entonces su desarrollo decimal no es periódico y el cuadro que pintemos será algo más interesante. Las siguientes figuras ilustran este fenómeno con los ejemplos 2/11, 123/999 y π:



$\frac{2}{11}$



$\frac{123}{999}$



π

Ilustran también el teorema de Cantor, por cuanto los píxeles pueden ser fácilmente puestos en fila de a uno, por ejemplo alineando una fila a continuación de otra en una misma recta, como se indica en la figura.

$\frac{2}{11}$ $\qquad$ $\frac{123}{999}$ $\qquad$ π

No obstante, hagamos como hagamos esa alineación, siempre encontraremos píxeles próximos en el cuadrado que están alejados en la recta y viceversa, de manera que se pierde la continuidad que exige el teorema de la invariancia del dominio y seguramente también la buena pintura. Por cierto, las obras de Bridget Riley y de Sol LeWitt tienen reminiscencias de los sencillos algoritmos que hemos estado considerando, por lo que su inclusión en la exposición que sobre el puntillismo realizó la Fundación Mapfre en Madrid de 2007 está en perfecto acuerdo con las tesis de este ensayo.

Delos, Bridget Riley

Bandas de colores en diferentes direcciones, Sol LeWitt

Las teorías de Cantor sobre los números transfinitos han fascinado a escritores como Borges, pero también a pintores y publicistas. Un caso notable es el llamado efecto Droste, por el anuncio de una marca de chocolates que es popular en los países bajos. El cartel representa a una enfermera que porta una bandeja con una caja del chocolate, en la que, a su vez, aparece la figura de la enfermera portando una bandeja con una caja de chocolate que, a su vez…

El efecto Droste

Se trata de un recurso que ya fue usado en algunas miniaturas medievales y por pintores como Giotto di Bondone en su tríptico *Stefaneschi* pintado en 1320, pero que en tiempos más recientes aparece en algunos dibujos del artista holandés Maurits Cornelis Escher, por ejemplo, en su famosa *Galería de grabados* realizada 1956 y que pudimos disfrutar hace un par de años en la exposición que organizó en Madrid la Fundación del Canal.

Galería de grabados, M.C. Escher

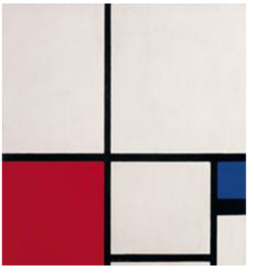
En la parte inferior derecha está dibujada la entrada a una galería de arte, mientras que en la izquierda del grabado aparece la figura de un hombre observando un cuadro que representa un puerto marítimo en el que está fondeado un carguero, y en cuya parte superior izquierda han sido dibujadas unas casas a la orilla de un muelle que se continúan hasta que nos encontramos con un edificio que coincide con el que alberga a la misma galería, cuya entrada, por otro lado, está dibujada en el ángulo inferior derecho del grabado que nosotros miramos. Mediante las transformaciones que aplica Escher, la parte superior derecha del grabado que está mirando la persona dibujada se encuentra ampliada en la parte superior derecha del grabado original. De manera que uno de los edificios incluidos es la misma galería de grabados en la que está el personaje quien, en una especie de efecto Droste espiral, acaba observándose a sí mismo. Escher dejó en blanco la región central del grabado porque las técnicas a su disposición no le permitían dibujar a la escala requerida, pero en el año 2000 Hendrik Lenstra logró entender las matemáticas involucradas, haciendo posible el uso de las técnicas informáticas de grabado para rellenar esa región que faltaba: la litografía puede ser considerada como el dibujo de una cierta curva elíptica sobre el cuerpo de los números complejos, de manera que ese centro en blanco contiene una copia del mismo grabado, girada en el sentido de las agujas del reloj un ángulo de 157,625… grados y a una escala reducida por un factor de 22,583684…

El teorema fundamental del cálculo: Mondrian y Malévich

El neoplasticismo, cuyo representante más genuino es seguramente Piet Mondrian, y el suprematismo, del que Kazimir Malévich fue máximo exponente, son quizás los movimientos pictóricos asociados a la abstracción geométrica cuyas formas encontramos con más frecuencia en los textos de variable real y de análisis armónico. Aunque diferentes, ambos propugnan el abandono de las formas complejas por un lenguaje plástico basado en elementos geométricos sencillos, tales como cuadrados, rectángulos, círculos y líneas rectas. Generalmente de formas paralelas a los lados del cuadro, o ejes coordenados, en el caso de Mondrian, o con direcciones arbitrarias en las representaciones suprematistas de Malévich. También coinciden en el uso de colores primarios, además del blanco y del negro. Especialmente famoso es el cuadro de Malévich titulado *Cuadrado negro sobre fondo blanco*, que pertenece a la colección del Museo Hermitage y que pudimos contemplar en Madrid el pasado año. Aunque la obra suprematista en los museos madrileños es escasa, el Thyssen tiene un interesante cuadro de Nikolái Suetin y el Reina Sofía posee algunos cuadros de Malévich, de quien la Fundación Juan March expuso varios dibujos en la muestra que dedicada a las vanguardias soviéticas realizó en 2011. En cuanto a Piet Mondrian, el Thyssen posee una interesante colección.

Suprematismo,
N. Suetin

Cuadrado negro sobre fondo blanco,
K. Malévich



Composición nº 1 con rojo y azul,
P. Mondrian

El cálculo diferencial representa un hito del pensamiento humano sin el cual resulta inconcebible la llegada de la revolución científica primero y la industrial después. El problema de calcular las tangentes a una curva, o la noción de velocidad instantánea, que llevó a la importante noción de derivada de una función, o el cálculo de áreas y volúmenes, que dio lugar al concepto de integral y función primitiva, fueron los motores de ese gran avance que las matemáticas experimentaron en el siglo XVII de la mano de Newton y Leibniz. Un resultado clave de la teoría fue el llamado teorema fundamental del cálculo (o regla de Barrow), que relaciona ambos conceptos: si $F(x)$ es la integral entre 0 y x de la función continua f, entonces la derivada de F es el integrando f.

Una formulación equivalente es la siguiente: dada una función continua f, el resultado de dividir la integral de f en un intervalo $J=(a, b)$ por la longitud, $b-a$, es un valor promedio de los valores de esa función f en el intervalo J. El teorema fundamental del cálculo nos dice que si consideramos promedios sobre intervalos que contienen a un punto dado x, para hacer luego tender a cero su longitud, entonces, en el límite, obtendremos el valor $f(x)$. Si en vez de una tuviésemos dos o más variables, los intervalos podrían ser cambiados por cubos, paralelepípedos, bolas u otros conjuntos más generales. Pero también en este caso, si calculamos promedios de una función continua sobre conjuntos que contienen a un punto y luego hacemos tender los diámetros a cero, en el límite obtendremos el valor de la función.

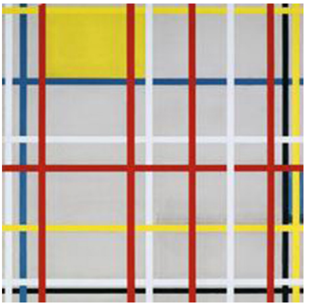
No obstante, existen muchos fenómenos interesantes que no pueden ser descritos por funciones continuas. Además, en numerosas ocasiones ocurre que aunque al final los objetos acaben siendo descritos por procesos, funciones o superficies, continuos y diferenciables, sin embargo la información *a priori* de la que disponemos no nos permite hacer esa suposición de partida. Pero los matemáticos han afilado las herramientas del cálculo de manera que puedan aplicarse en situaciones mucho más generales. Como hizo Henri Lebesgue (*Leçons sur l´intégration et la recherché des* *fonctions primitives*, 1904), a quien debemos la noción de *integral*, generalizando la de Newton y Leibniz, y que es un instrumento poderoso del análisis matemático contemporáneo.

En la teoría de la medida de Lebesgue se asigna a cada conjunto medible un número no negativo que ha de satisfacer ciertas propiedades naturales, tales como: i) la medida de un cubo unidad es 1; ii) la medida de la unión numerable de conjuntos medibles disjuntos es igual a la suma de sus medidas respectivas; iii) la medida es invariante por traslaciones. A partir de la medida se obtiene la integral y la caracterización de las funciones integrables. Los conjuntos de medida nula desempeñan, a pesar de su nombre, un papel determinante: tener dos funciones iguales en esta teoría significa que ambas coinciden excepto, quizás, por un tal conjunto; es decir, la igualdad significa siempre «salvo conjuntos despreciables o de medida igual a cero». Cada función integrable f tiene a su vez una primitiva F que asigna a cada conjunto medible E la integral de f en E, y resulta fácil observar que la primitiva de una función integrable es: i) aditiva (el valor que toma F en una unión numerable de conjuntos medibles es igual a la suma de los valores de todos ellos, siempre que estos sean disjuntos dos a dos); ii) absolutamente continua (el valor $F(E)$ tiende a cero si la medida de E tiende a cero). El teorema de diferenciación de Lebesgue, que es una pieza fundamental de su teoría, consiste en el recíproco de esa observación anterior:

Teorema fundamental del cálculo (Lebesgue). En el espacio euclídeo, toda función de conjuntos F, aditiva y absolutamente continua, tiene una única función integrable f de manera que F sea su primitiva. Además se verifica que los cocientes $F(Q)$/medida(Q) sobre cubos que contengan a un punto x convergen al valor $f(x)$ cuando el diámetro de Q tiende a cero, salvo quizás para un conjunto de puntos x de medida nula.

Lebesgue demostró este teorema en la monografía de 1904, pero algo más tarde Vitali encontró una prueba más geométrica basada en las propiedades de recubrimiento que verifican los cubos del espacio:

Lema de Vitali. Dada una familia de cubos $\{Q_\alpha\}$, podemos elegir una subfamilia numerable $Q_1, Q_2, Q_3\dots$ de manera que: i) son disjuntos dos a dos; ii) la medida de la unión de la subfamilia es mayor que una porción fija de la unión de los cubos originales.



New York City 3, P. Mondrian

La relación entre el lema de Vitali y el teorema fundamental del cálculo, y de un proceso algo más complejo como es la descomposición de Calderón-Zygmund de una función integrable, da lugar a dibujos que semejan los cuadros neoplasticistas de Mondrian. De manera que los analistas armónicos han estado, en ocasiones sin saberlo, dibujando mondrianes en su empeño de resolver diversos problemas analíticos.

¿Qué ocurre cuando se cambian los cubos por paralelepípedos de lados paralelos a los ejes coordenados? Resulta que el teorema fundamental es falso para la generalidad de las funciones integrables en dimensión mayor que dos, y eso lo observó Stanislaw Saks en torno a 1930; luego Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund, en un trabajo conjunto, demostraron que sí es cierto bajo la hipótesis de que la función sea algo mejor que integrable: basta con que pertenezca al espacio $L(\log^+ L)^{n-1}$. En cuanto al lema de Vitali, la figura siguiente muestra que deja de ser cierto en esta nueva geometría:

Un subconjunto de rectángulos de la figura que sean disjuntos dos a dos solo puede contener a uno de ellos, por lo que la suma de sus medidas es 1. Por otro lado,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} R_j\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \,,$$

crece como ln(n), impidiendo la validez del lema de Vitali para estos rectángulos.

Durante cierto tiempo fue un objeto del deseo de los analistas armónicos obtener el correspondiente lema de recubrimiento, que es el siguiente:

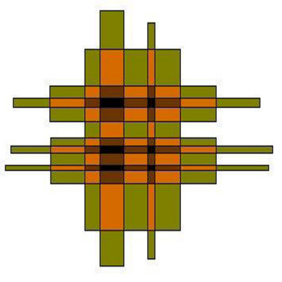
Dada una familia $\{R_\alpha\}$ de paralelepípedos de lados paralelos a los ejes coordenados en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, podemos seleccionar una subfamilia numerable R_1, R_2, R_3… de manera que

$$\mu\left(\cup R_j\right) \geq c\,\mu\left(\cup R_\alpha\right),$$

$$\int_{\cup R_j} \exp\left(\sum_j \chi_{R_j}(x)\right)^{\frac{1}{n-1}} d\mu(x) \leq C\,\mu(\cup R_j),$$

donde las constantes $0 < c \leq C < \infty$ solo dependen de la dimensión del espacio subyacente.

El «mondrian» que sugiere este lema muestra un solapamiento que crece exponencialmente con las tonalidades más oscuras del cuadro (figura de la derecha).



Suprematist compositions, K. Malevich

¿Y si permitimos paralelepípedos de dirección arbitraria? Entonces el teorema fundamental deja de ser cierto incluso para funciones acotadas, en el sentido de Lebesgue, y el enemigo es un conjunto paradigmático del plano, llamado el conjunto de Besicovitch o de Kakeya, que tiene medida cero pero que, a pesar de ello, contiene a una recta en cualquier dirección. Cuando se plasma la construcción de estos conjuntos, los dibujos resultantes son claramente suprematistas, pareciéndose mucho a los cuadros de Malévich.

3.
Las matemáticas en la educación de los ciudadanos

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los del poeta, es porque están hechos de ideas.

G.H. Hardy

¿Cómo es posible que una ciencia que sólo utiliza los principios fundamentales de la lógica, el principio de contradicción sobre todo, que es el esqueleto de nuestro entendimiento, aquello de lo que no se nos podría despojar sin que dejásemos de pensar, resulte oscura a la mayoría de la gente?

H. Poincaré

¿Qué sería de una nación que en vez de geómetras, astrónomos, arquitectos y mineralogistas, no tuviese sino teólogos y jurisconsultos?

G.M. Jovellanos

Orfebrería de ideas

La lengua y las matemáticas son los pilares de la Ilustración, y juntas desempeñan un papel fundamental en los primeros niveles de la enseñanza. Poseer las destrezas aritméticas y geométricas elementales resulta indispensable para llevar a cabo las actividades cotidianas de cualquier persona, como también lo es el conocimiento del cálculo diferencial para quienes deseen tener una preparación técnica o científica, por rudimentaria que esta sea.

Sin embargo, la aportación de las matemáticas a la educación ciudadana tiene también otros registros que atañen al buen funcionamiento de la mente; a saber, detectar cuándo unas consecuencias se siguen de las hipótesis establecidas y poder enlazar varios silogismos para llegar a una verdad; o, por el contrario, hacer saltar las alarmas cuando alguien nos está induciendo a unas conclusiones falaces que no se siguen de los supuestos de partida.

Toda materia bien presentada puede cumplir esa función, pero las matemáticas están especialmente indicadas para implantar el sistema operativo en el cerebro humano, por ser generalmente sencillos sus conceptos y claras sus definiciones, a diferencia de otras disciplinas en las que el lenguaje es mucho más barroco y confuso.

Estudiando las propiedades de los números enteros y de las figuras geométricas elementales pueden enlazarse varios silogismos, llevándonos a establecer proposiciones interesantes y nada triviales. Es la grandeza de las demostraciones, del método deductivo y del principio de la razón suficiente de Leibniz que, administrados en las dosis oportunas, constituyen la mayor contribución de las matemáticas a la educación de los ciudadanos: mostrar las reglas del razonamiento deductivo, el significado de una implicación y, aunque sea de forma moderada, enseñar el arte de engarzar las ideas en esas cadenas de proposiciones que nos permiten demostrar la verdad.

Pero también nos ayudan a detectar las falacias más comunes, tales como: círculo vicioso; argumentos *ad hominem, ad populum, ad baculum* o *ad verecundiam*; juicios de intenciones; confusión del antecedente con el consecuente; *post hoc, ergo propter hoc,* etcétera. A menudo somos testigos de argumentos falaces, en los que muchos ciudadanos se enredan. Así el que dice: «todos los catalanes son ahorradores, porque hay dos en mi barrio que…»; o «llovió después de la procesión, ya que el santo hizo el milagro de la lluvia», o quien afirma que «todos los banqueros son unos usureros, porque ayer, al ingresar un talón, me cobraron una comisión excesiva». El estudio de las matemáticas debe enseñar, entre otras cosas, que la mejor manera de demostrar que existen banqueros honrados consiste, si se puede, en mostrar un ejemplo.

Todos conocemos alguno de esos chistes o trabalenguas en los que se nos pregunta acerca del parecido entre dos conceptos o entidades que, a primera vista, no concuerdan en nada. He aquí uno de mis favoritos:

«¿En qué se parece un gato a un triángulo rectángulo? Pues en que el gato persigue al ratón; el ratón se come el queso; el queso se hace de la leche; la leche la da la vaca; la vaca es una res; *res* en catalán significa nada; el que nada no se ahoga; el que no se ahoga flota; la flota es una escuadra y, finalmente, la escuadra es un triángulo rectángulo».

Salta a la vista lo estrafalario del argumento, basado en una pintoresca asociación de términos. Pero que, en lo esencial, no se aleja mucho del patrón que observan a menudo los espíritus discretos, entrenados en el razonamiento riguroso de las matemáticas, cuando osan analizar el habla cotidiana de mucha gente y las frases más delirantes de algunos de nuestros representantes políticos. Véanse si no los siguientes ejemplos de los muchos que circulan por internet:

- Ana Botella (Alcaldesa de Madrid): «El matrimonio homosexual es como si se suman una manzana y una pera… ¡nunca pueden dar dos manzanas!»
- José Blanco (ex ministro de Fomento): «Yo, como sé de lo que hablo, me callo».
- Miguel Ángel Rodríguez (ex secretario de Estado): «ETA lleva ya cuarenta años haciendo lo mismo, así que sólo hay un culpable: Zapatero».
- Xabier Arzallus (ex presidente del PNV): «La sangre con Rh negativo confirma la antigüedad del pueblo vasco».
- Felipe González (ex presidente del Gobierno): «En el año 82 prometí crear 800 000 puestos de trabajo, y en el año 86 se habían destruido 800 000. Cuatro años después no prometí nada, y se crearon 1 300 000».
- José María Aznar (ex presidente del Gobierno): «Tienen muchos problemas que tampoco son exclusivos del aeropuerto

de Barajas. Sería bueno contar con la colaboración de todos, porque realmente puede haber problemas. Hace poco hubo problemas de vuelo por algunas razones. Puede haber razones, puede haber problemas de otro tipo de razones en el espacio aéreo y, en fin, puede haber otros problemas».

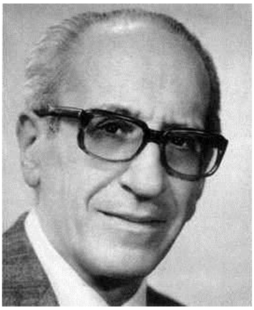
- José Luis Rodríguez Zapatero (ex presidente del Gobierno): «El Gobierno extrema lo que representa acreditar la voluntad de ETA para abandonar las armas».
- Mariano Rajoy (presidente del Gobierno): «Vamos a ver, eeh, uuum… ¿Medidas para crear empleo? Bueno, la verdad es que me ha pasado una cosa verdaderamente notable, que lo he escrito aquí y no entiendo mi letra».

De esta somera muestra de frases pronunciadas por personajes tan significativos cabría deducir que, en España, la enseñanza de las Matemáticas es muy mejorable. Lo que seguramente es una conclusión correcta, aunque a menudo suele ser presentada en los medios de comunicación de una manera un tanto dramática, al hilo de ciertas evaluaciones e informes, como el afamado PISA, a los que creo que se les da una excesiva importancia. Pero el asunto de la docencia, sobre todo en sus primeros niveles, levanta encendidas y nada áticas polémicas entre los expertos españoles, quienes están agrupados en varias asociaciones de profesores de Matemáticas que editan sus propias revistas.

Con ocasión del Congreso internacional celebrado en Madrid en el año 2006, *La Gaceta* de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), a cuyo Comité Asesor pertenecí en aquel año, se propuso publicar artículos en torno a la enseñanza de las Matemáticas. Con ese fin se recabó la colaboración de algunos de los más conspicuos y activos artistas que solían opinar sobre esos temas en las revistas de sus respectivas asociaciones. Pero lo que en principio parecía una iniciativa razonable y sencilla, resultó ser un gran embrollo, por cuanto algunas de estas sociedades mantienen puntos de vista muy distintos y usan modos a veces demasiado agresivos. Simplificando un tanto una polémica que resultó ser bastante intrincada y barroca, estaban los partidarios de la llamada «reforma de los 80», quienes, entre otras tesis, sostienen que durante las primeras etapas hay que introducir las matemáticas en forma de juegos y divertimentos con los números y las figuras geométricas, sin hacer énfasis en los algoritmos de cálculo basados en el sistema decimal; al tiempo que propugnan una enseñanza uniforme, que no haga distinciones entre las distintas aptitudes de los alumnos. Enfrente estaban quienes defienden la introducción, desde las etapas iniciales, de las reglas y algoritmos aritméticos, y sostienen que la diversificación es natural llevarla a cabo desde los primeros cursos.

Nos sorprendió lo enconada que estaba la polémica, que llevó a *La Gaceta* a tener que ofrecer un número igual de páginas a cada uno de los grupos antagónicos. No obstante existen precedentes de comportamientos extremos en estos asuntos: en los años sesenta, cuando por influencia del grupo Bourbaki y de autores como Jean Piaget tuvo lugar un cambio radical en la enseñanza que adoptó la denominación de *matemática moderna.* Apoyándose en el eslogan de «Abajo Euclides», propugnado por el matemático francés Jean Dieudonné, se puso el énfasis en una aproximación estructuralista que en España se llevó a cabo con una especial virulencia, bajo la dirección de algunos matemáticos influyentes de aquel tiempo, como era el caso del Profesor Abellanas Cebollero de la Universidad Complutense de Madrid.

Reina de las ciencias


Alberto Calderón (1920-1998)

Una de las características de las matemáticas es su estructura lógica, que tratando con conceptos sencillos (número, recta, triángulo, círculo, etc.), nos ayuda a entrenar el cerebro humano para efectuar razonamientos deductivos rigurosos. Es también un arte, como señala la frase de Hardy que hemos mencionado anteriormente: una orfebrería de las ideas entrelazadas en cadenas de razonamientos. Pero además persigue ciertos fines que es imprescindible conocer para lograr su inteligibilidad. Desde los tiempos de Gauss suele decirse que la matemática es la reina de las ciencias pero que, como toda buena reina, debe servir a sus súbditos. Y esa cualidad tiene también que ser proyectada en su docencia. Quiero decir que no basta con enseñar la estructura lógica de la aritmética y la geometría elementales, sino que también es importante, desde un principio, hacer hincapié en el «para qué», en las consecuencias y aplicaciones que las matemáticas tienen en nuestra vida cotidiana y en el conocimiento del mundo que nos rodea. El gran Alberto Calderón lo expresó con un ejemplo muy apropiado:

> Si algo tiene una finalidad, el conocimiento de esta es indispensable para su comprensión. Pensemos en una herramienta, por ejemplo un destornillador, y preguntémonos si comprendemos qué es un destornillador. Probablemente se podrían escribir cientos de páginas sobre destornilladores describiendo en gran detalle la naturaleza y sustancia de sus mangos, la estructura química, física y cristalina de sus partes metálicas, la descripción detallada de sus formas geométricas, los procesos de preparación y fabricación de sus elementos, etcétera. Pero luego de habernos informado de todo eso, ¿sabríamos ya qué es un destornillador? Yo diría que no. Creo que para saberlo es necesario

conocer la respuesta a una pregunta fundamental: ¿para qué sirve un destornillador?

Mientras no conozcamos esta respuesta nuestro conocimiento de los destornilladores será precario. Sólo esta respuesta hará posible saber qué es importante y qué es secundario en la naturaleza de los mismos. Es decir, su comprensión es solo posible mediante la comprensión de su función o finalidad. Además esta nos permite jerarquizar nuestros conocimientos de aquellos. Sin ella esta jerarquización es imposible.

Hay una corriente de pensamiento que, en mayor o menor medida, auspicia el estudio de la matemática olvidándose del «para qué», con sus consecuencias pedagógicas. Lo que quiero expresar aquí es mi convicción contraria a esa corriente. No creo que sea posible aprender matemática prescindiendo totalmente de los fines que esta persigue.

Comparto totalmente el comentario de Calderón, cuya obra es una de las más profundas y originales contribuciones al análisis matemático del siglo XX. Personalmente siempre le estaré agradecido, por cuanto su ayuda fue decisiva para que yo obtuviera una beca en el programa de doctorado de la Universidad de Chicago allá por el año 1970. Con el tiempo la Universidad Autónoma de Madrid (UAM) lo nombró *Doctor Honoris Causa,* y en su discurso de aceptación Alberto nos relató varias interesantes y deliciosas anécdotas de su rica trayectoria académica. Siguiendo esa línea, creo que quizás pueda resultar apropiado en estas páginas dejar constancia de algunas reflexiones mías sobre el aprendizaje y la docencia que son fruto de mi propia experiencia, primero como alumno y luego como profesor de Matemáticas.

Casi toda mi vida ha transcurrido en torno a un centro escolar, y siempre me ha interesado la enseñanza. Sin embargo, mentiría si afirmara que no me aburren un tanto los comentarios recurrentes de algunos colegas universitarios acerca de la ignorancia de nuestros alumnos, de lo escasamente preparados que nos vienen del bachillerato y de lo poco que estudian. También suelo huir de esas conversaciones en las que diversos artistas ponen el grito en el cielo porque tal o cual tema haya desaparecido del currículum, o discuten acerca de si es más apropiado introducir primero la integral de Riemann, o pasar directamente a la de Lebesgue, por poner un ejemplo de tema muy manido en las antiguas memorias de oposiciones a cátedras de Análisis Matemático.

En algunas ocasiones en las que he sido entrevistado y me han preguntado por la naturaleza de mi trabajo, suelo responder que me considero un profesor, pero un profesor que enseña porque investiga. Sin embargo, mi experiencia docente ha sido mayormente universitaria, por lo que quizás quede un tanto alejada de lo que significa el título de este capítulo. Como a los militares el valor, a los profesores se nos asocia la sabiduría en temas didácticos y cuando esta no va unida al propio proceso creativo, o a la interpretación sentida de la música de los grandes maestros, puede, y suele, producir algunos monstruos. En la introducción he dejado constancia del papel que desempeñé, en la década de los ochenta del pasado siglo, en el proceso de puesta al día del sistema de evaluación de la investigación y también en el proyecto de creación de un departamento que fuese un foco de modernidad matemática. Sin embargo, cuando las autoridades académicas me pedían por entonces participar en comisiones de docencia, siempre ponía la condición de que el resto de los miembros de la comisión hubiesen sido también profesores en varias universidades; siendo alguna, por lo menos, de un país extranjero. Se trataba de algo que me parecía muy natural, pues estaba cansado de discutir de esos temas junto a colegas que no conocían otros programas que los de su propia universidad. Programas que, a su vez, eran un reflejo de los tradicionales de las Facultades «clásicas» de Matemáticas en España (Complutense, Central de Barcelona y Zaragoza). Pero esa condición resultó ser demasiado restrictiva, así es que mi actividad universitaria ha transcurrido bastante al margen de la discusión en torno a «libros blancos», asignaturas troncales, asignación de créditos y «planes de Bolonia».

A mediados de los años 70, siendo profesor de la Universidad de Princeton, participé, junto al *chairman* y otros profesores veteranos de mi departamento, en una reunión con nuestros colegas de Ingeniería Química con el objeto de analizar los programas que impartíamos a los alumnos de esa ingeniería. Me parece que entre los matemáticos había una moderada preocupación al respecto, debido, quizás, a la fama que siempre nos acompaña de ser demasiado abstractos y formalistas. De manera que empezamos haciendo algunas propuestas de mejora, prometiendo incluir en nuestros programas la discusión de muchas aplicaciones del Cálculo a problemas ingenieriles. Para nuestra sorpresa, los químicos, entre quienes se encontraban un par de premios Nobel, nos corrigieron afirmando que lo que se esperaba de los matemáticos es que enseñaran el Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, pero poniendo énfasis en las demostraciones y en el proceso deductivo, y no tanto en las aplicaciones de las que ellos ya se harían cargo; porque lo que realmente necesitaban de nosotros era educar a sus alumnos para discernir cuándo unas consecuencias se siguen de las hipótesis de partida, o por el contrario, detectar si nos están llevando por razonamientos equivocados; es decir, enseñarles a manejar el método deductivo. En cualquier caso, los programas que se impartían en Princeton constituían un material bastante básico, necesario para cualquier científico o ingeniero. Sin embargo, algunos años más tarde, ya en Madrid, participé en una reunión similar en una Escuela Superior de Ingeniería en la que, para mi sorpresa, el catedrático de la asignatura se ufanó de explicar el cálculo diferencial en espacios vectoriales topológicos a través de la noción de *ultrafiltro,* que es algo que yo no aconsejaría ni para el más delirante de los programas destinados a estudiantes de la licenciatura de Matemáticas.

Durante los años de vacas gordas del crecimiento universitario, he sido testigo de la proliferación en España de estudios de licenciatura en Matemáticas, con un grado de concentración que excluían hasta las asignaturas de Física, y con un nivel tan alto que en las Universidades de Princeton y Chicago, por citar dos que me son especialmente conocidas, solamente se pretendería impartir a los muy pocos alumnos que se gradúan con *honors*. Siempre que tuve la ocasión me manifesté en contra y propuse la creación de una licenciatura general en Ciencias, con un sesgo de especialización en los últimos años, como una manera racional de abordar la enseñanza universitaria a las masas de estudiantes que se incorporaban cada año, y que suspendían de manera sistemática y mayoritaria unos estudios tan especializados. Lo que no tiene por qué ser incompatible con que a la minoría de los dotados y motivados se les ofrezca un camino más rico y expeditivo. Pero no creo haber tenido el más mínimo eco durante todo ese tiempo. Solamente ahora, que estamos en periodo de vacas flacas, aparecen algunas opiniones contrarias a tantos estudios especializados en tantas universidades españolas, y a tantos programas distintos de doctorado. Por lo que sólo cabe esperar que la gestión de la crisis económica en la que estamos sumidos, cuyas consecuencias negativas para la financiación y consolidación del desarrollo científico en nuestro país son tan preocupantes, nos sirva, al menos, para racionalizar un poco los estudios y la oferta de plazas universitarias. Aunque resulta difícil ser optimista cuando se observa a quienes dirigen casi siempre los cambios. En el caso de las Matemáticas se ha dado el caso de hacerlo quien no ha publicado en su vida un artículo de investigación y solo ha enseñado asignaturas elementales de un área muy particular. Que alguien de esas características lidere el proceso llamado de Bolonia y decida sobre institutos de investigación es algo que se da entre nosotros y que ilustra sobre nuestras carencias institucionales y nuestra proverbial invertebración científica. Habida cuenta de lo mucho que ha costado siempre introducir cambios positivos, llama la atención cómo estos personajes antes aludidos lograron que términos tan señeros como *licenciado,* o *licenciatura,* que ya aparecen en el *Quijote,* hayan sido sustituidos sin más por *graduado,* o *grado,* sin que mucha gente proteste.

Comparados con los de Princeton, me parece que los estudiantes españoles nos vienen del bachillerato a la Universidad con una actitud demasiado pasiva. Pero, en cualquier caso, lamentarse de los conocimientos y aptitudes del alumnado es un asunto muy clásico. Véanse, si no, los comentarios siguientes de Henri Poincaré (en *L´Enseigement Mathématique*, 1908):

En los liceos franceses más del 90% de los alumnos carece de la disposición para el estudio de las Matemáticas. ¿No es esto sorprendente? Si las Matemáticas no emplean más que aquellas reglas de la lógica que son aceptadas por todos los espíritus normales; si su evidencia está fundada sobre principios que son comunes a todos los hombres y que nadie puede negar sin ser un perturbado, ¿cómo se explica que existan tantas personas refractarias a su estudio?

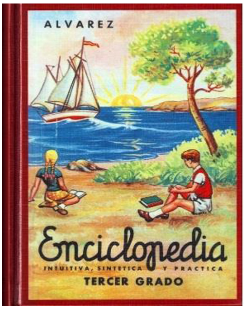
La enseñanza secundaria en la pasada centuria (siglo XIX) tuvo un fracaso ruidoso. A finales de siglo se abrió en Francia una información parlamentaria acerca de ella; declararon más de doscientas personas y en seis gruesos volúmenes están expuestas las ideas más discordes. Sólo hay un punto en el que todos coinciden: los resultados de la enseñanza son deplorables. Universitarios eminentes como Darboux revelaron que, pocos meses después del examen, la mayor parte de los bachilleres no sabían resolver una regla de tres simple y la Sorbona tuvo que instituir un curso de Aritmética para bachilleres en Ciencias.

Algunas reminiscencias personales

Mi madre era maestra y me llevaba consigo a sus clases, donde a mí me tocaba desempeñar el arriesgado papel de hijo de la maestra en las escuelas de varios pueblos de mi tierra natal, de nombres tan sonoros como Algezares, Los Infiernos, El Llano de Brujas, Ricote o San Pedro del Pinatar. Eran entonces escuelas exclusivamente de niñas, siendo la literatura, y en particular la poesía, lo que a mi madre más le gustaba enseñar. Y aunque yo me esforzaba en aprender sus poemas favoritos, era evidente que sus alumnas manejaban el idioma con mucha mayor soltura de lo que estaba a mi alcance. Empero, no sé cómo, descubrí que con las cuentas era distinto, y ahí encontré yo la posibilidad de hacerme valer ante aquellas niñas maravillosas. Eso me llevó a aprender a temprana edad las nociones de aritmética y de geometría elementales, pero también a apreciar que las matemáticas pueden ser un vehículo idóneo para la amistad y el galanteo.

Cuando cumplidos los cinco años ingresé en la escuela pública de mi pueblo, situado en la huerta murciana, próximo a la ciudad, mi maestro me hizo adelantar dos cursos al tener en cuenta lo que había aprendido en la escuela de niñas de mi madre, de manera que mis compañeros de promoción me llevaban dos o tres años de edad. Era una escuela de las llamadas «unitarias», con alumnos entre los cinco y los doce años, en un número aproximado de setenta para un único maestro.

Todavía me resulta increíble cómo aquel benemérito don Eduardo se las agenciaba para educar a semejante tropa. Seguía el método de que los alumnos más aventajados colaboraran enseñando al resto, y fue así como yo me encontré, con pocos años, explicando las reglas de la aritmética. No sé qué beneficio pudieron sacar los receptores de mi docencia, pero para mí fue una experiencia importante, porque me hizo descubrir por mi cuenta las maravillas que hay dentro del sistema decimal de numeración, y preguntarme por el significado de aquellas muletillas que decían, por ejemplo: 7 + 8 = 15, que son cinco unidades y me llevo una a la columna de las decenas, y de apreciar lo ingeniosos que son, cuando uno se para a pensarlos, los algoritmos de la división por varias cifras o la extracción de raíces cuadradas. Tuve la suerte, tratando de enseñarlas a mis compañeros, de poder apreciar la aritmética y la geometría como unas fuentes de preguntas interesantes que yo intentaba responder, y no como una retahíla de reglas y definiciones que había que memorizar. Pero, reflexionando ahora sobre aquella escuela, tiendo a estar de acuerdo con quienes propugnan que la aritmética debe empezarse poco a poco, operando con números pequeños que se puedan sumar, restar, multiplicar, dividir y descomponer en factores primos, sin necesidad de memorizar tablas y algoritmos, cuya introducción prematura parece haber traumatizado a tantos. En alguna ocasión he preguntado a los alumnos de los últimos cursos de la licenciatura de Matemáticas si saben dividir. Me suelen responder afirmativamente algo sorprendidos, y casi ofendidos, pero la sorpresa aumenta cuando entienden que mi pregunta es acerca de la justificación del algoritmo: la mayoría lo usa bien, pero desconoce el porqué de su funcionamiento. Y si esto les pasa a los estudiantes de la licenciatura de Matemáticas, mejor es no pensar en lo que hallaríamos si preguntásemos a la generalidad de los ciudadanos.



Como libro de texto usábamos en mi escuela la *Enciclopedia* de Álvarez, cuyo tercer grado mostraba un compendio de definiciones que eran tan precisas como, a menudo, absurdas. Seguía la tradición de los tratados inspirados en los *Elementos* de Euclides, magnífica obra del período alejandrino en la que se introduce el método deductivo con sus definiciones, axiomas y teoremas, y que no podemos en absoluto considerar un mal ejemplo. Pero los *Elementos* fueron concebidos como una recopilación del saber matemático de su tiempo, y no como libro de texto para enseñar a los niños. Aún puedo recitar la primera lección de aritmética, que empezaba así:

- Unidad: Unidad es una cosa sola.
- Cantidad: Cantidad es la reunión de varias unidades.
- Número: Número es el resultado de pesar, medir o contar una cantidad.

A continuación, y sin solución de continuidad, pasaba a clasificar los números en enteros, quebrados y mixtos, que eran, según el Álvarez, los que tenían parte entera y parte fraccionaria. El arranque de la geometría no era menos dadaísta. Se trataba de lo siguiente:

- Punto: Punto es lo que no tiene dimensión en el espacio.
- Línea recta: Es la que tiene sus puntos en la misma dirección.
- Línea curva: Es la que tiene sus puntos en distintas direcciones.

Y continuaba, a renglón seguido, clasificando las rectas en verticales, horizontales y oblicuas; añadiendo además al catálogo las líneas quebradas, las onduladas y las espirales.

A los diez años aprobé el examen de ingreso en el Instituto de Enseñanza Media de Murcia, siendo yo el único alumno de aquella escuela primaria que accedió al bachillerato. Todavía recuerdo la enorme impresión que me produjo realizar esa prueba: salir de la arcadia de mi pueblo de la huerta murciana, de los dominios familiares de mi escuela y de mi maestro, para examinarme ante un tribunal de profesores del único instituto de mi ciudad (en realidad había entonces dos, uno para cada sexo de aquella enseñanza separada). Creo sinceramente que la ansiedad que experimenté en aquella experiencia ha convertido en algo fácil y liviano el resto de los exámenes que he tenido que hacer a lo largo de mi vida. La prueba consistía en una parte escrita, en la que primero teníamos que redactar lo que dictaba un profesor y después hacer una división larga en la que el divisor tenía tres cifras. Luego venía la parte oral, en la que comenzábamos leyendo en voz alta de un ejemplar del *Quijote*, para luego responder a unas sencillas preguntas que nos formulaban aquellos profesores del tribunal.

Aún tengo en la memoria las que me tocaron en suerte: «qué es una circunferencia» y «qué es una montaña». Afortunadamente la *Enciclopedia* de Álvarez, en su tercer grado, tenía respuestas precisas que me sabía de carrerilla: *circunferencia* es 'una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro'; *montaña* es 'una elevación considerable de tierra sobre la superficie que la rodea', se leía en mi libro que yo conocía al dedillo por haberlo usado durante tres cursos. Después un sacerdote que formaba parte del tribunal me preguntó por el credo, y así concluí con alivio aquella dramática aventura de mi infancia que, no obstante, puedo decir que superé con un cierto éxito, por cuanto logré una buena calificación y obtuve una beca (de unas cinco mil pesetas anuales de aquel tiempo) que me permitieron ir adquiriendo una buena colección de libros.

Durante los primeros cursos del bachillerato creo que fui una pesadilla para mis profesores de Matemáticas, cuestionando algunas de las definiciones de los textos que nos recomendaban aprender. En particular recuerdo que me molestaba mucho la llamada propiedad uniforme («a sumandos iguales, sumas iguales») cuyo enunciado me parecía entonces, y me sigue pareciendo ahora, una simpleza, una tontería que no se merecían las matemáticas. Hasta que uno de ellos, quien había sido en su juventud investigador químico en la Universidad de Murcia y ejercía entonces de profesor de Matemáticas en el Instituto, decidió hacerme su «ayudante» con la misión de explicar cada día la lección que tocaba en clase, y que a menudo versaba sobre la geometría de los triángulos, las construcciones con regla y compás, o las propiedades de los números primos. También me regaló unos cuadernillos de la llamada *matemática moderna* que habían sido editados por los colaboradores de don Pedro Abellanas y que a mi profesor, a su edad ya avanzada, le resultaban algo abstrusos. En ellos descubrí, y me familiaricé por primera vez, con la jerga estructuralista de los conjuntos, grupos, anillos, cuerpos y clases de equivalencia que me sirvieron entonces para darle un sentido a la dichosa propiedad uniforme. Pensando en retrospectiva, no sabría calibrar si aquella experiencia fue positiva para mis compañeros, pero a mí me estimuló el interés por las matemáticas y me animó a buscar información en textos más avanzados, como eran los libros publicados por Julio Rey Pastor.

En los cursos superiores del bachillerato tuve la suerte de encontrarme con don Francisco Soto Iborra, un magnífico profesor, quien supo aclarar muchas de mis dudas de entonces sugiriéndome también otras lecturas, como el *Álgebra moderna,* de G. Birkhoff y S. Mac Lane, y la *Topología general* de J. Kelley, que habían aparecido publicadas en castellano, y cuyos primeros capítulos leí con avidez. Soto acostumbraba a sentarse entre nosotros, en medio de la clase: planteaba unas cuestiones y lograba estimular un diálogo en el que, con su sabia ayuda, íbamos entre todos sugiriendo las estrategias necesarias para entender y resolver el problema en querella. Solamente al final, cuando todo estaba claro, se levantaba y escribía en la pizarra lo que habíamos «creado» entre todos. No sabría ahora determinar el impacto que su enseñanza tuvo en el resto de mis compañeros, aunque de su clase hemos salido tres matemáticos catedráticos de universidad, pero su influencia fue decisiva en mi decisión de estudiar la licenciatura de Ciencias Exactas.

Un día estábamos analizando un problema de regresión lineal, la llamada recta de ajuste a una distribución bidimensional de frecuencias, cuando a mí se me ocurrió un método algo distinto del que venía indicado en los textos. Don Francisco me animó a desarrollarlo y esa noche, ya en mi casa, experimenté por primera vez la excitación intelectual de adentrarme en *terra incognita*. Logré escribir para esa recta una ecuación que me pareció elegante y que expuse en clase al día siguiente. Entonces Soto me pidió redactarla para su posible publicación en la *Gaceta Matemática,* y aunque ahora ese artículo tan ingenuo me hace sonreír, se trata de mi primera publicación científica.

Acabado el bachillerato me vine a Madrid para cursar la licenciatura, luego fui a Chicago para el doctorado y después a Princeton, donde enseñé e investigué durante varios años. Perdí el contacto con Soto, pero lo volví a encontrar a mediados de los 80 en Valencia, en cuya Escuela Normal era él profesor y yo había sido designado para un tribunal de oposición. Entonces me enteré de que había recibido un premio del Ministerio por su trabajo sobre cómo enseñar Aritmética a alumnos ciegos, usando regletas de diversos tamaños y texturas. Y también de que en esos momentos estaba desarrollando su método con niños sordos, pero que esto, según me dijo, presentaba dificultades mayores.

El 2000 fue declarado por la Unesco «Año mundial de las matemáticas» y, entre las diversas actividades que se organizaron entonces para celebrarlo, participé dando un ciclo de conferencias sobre las «Matemáticas de lo cotidiano» por distintos institutos y colegios de enseñanza media de la Comunidad de Madrid. He de decir que, en general fue una grata experiencia, y que mis conferencias fueron seguidas con interés y cortesía por los cientos de alumnos que llenaban los salones de actos de sus institutos. Me sorprendió, no obstante, encontrarme con una mayoría de profesoras, licenciadas en Matemáticas y que, al menos en un par de casos, estaban terminando también la tesis doctoral. Me parece algo digno de ser resaltado que nuestros centros públicos de enseñanza media se beneficien de la labor de una cantidad de mujeres, licenciadas en Matemáticas y muy preparadas que, por diversas razones, encuentran esa docencia adecuada a sus intereses profesionales y familiares. Eso no es habitual en otros países, como es el caso de Estados Unidos, donde puedo añadir la anécdota personal de que mis dos hijos, que cursaron el bachillerato en parte en un instituto madrileño y en parte en el de Princeton, que está considerado allí como un buen centro, se pasaron sus años *princetonianos* añorando a sus profesoras de Matemáticas del instituto de Madrid.

Sin embargo, estas observaciones mías distan mucho de la imagen a la que nos tienen acostumbrados nuestros escritores y cineastas, que parecen estar heridos y traumatizados por la enseñanza que dicen haber recibido, y que presentan siempre al profesor de Matemáticas como al malo de sus relatos: un señor malhumorado, feo y cascarrabias que martiriza la vida de sus simpáticos alumnos, obligándolos a memorizar la tabla de multiplicar y otras rutinas por el estilo. Valga de ejemplo ese maestro ultramontano y facha de la popular serie *Cuéntame cómo pasó*.

Pero aparte de esos tristes tópicos que se propagan con demasiada frecuencia, no cabe duda de que la docencia de las Matemáticas es algo complicado, por la propia naturaleza de su objetivo principal, que es enseñar el razonamiento deductivo, y que necesita de un profesorado entusiasta conocedor de ese arte de engarzar las ideas y no de un mero transmisor de definiciones y rutinas de cálculo. Si establecemos una analogía con la enseñanza musical, se necesitan profesores que sepan tocar algún instrumento, que vibren y gocen con la música y puedan recrearla, y no sólo que conozcan algo de su historia o las reglas de su lenguaje escrito. Naturalmente que ahí tenemos un problema, ya que sería poco realista pretender que los maestros de esos primeros niveles sean, en su mayoría y aunque tengan el título de licenciados en Matemáticas, personas activamente interesadas en su creación. Pero, sin duda alguna, les representaría una gran ayuda disponer de una buena colección de textos, escritos por auténticos creadores que transmitan la aventura intelectual y romántica que representa el conocimiento de las propiedades de los números y de las figuras geométricas, además de su utilidad para el desempeño de sus actividades futuras.

En el año 2009 el Colegio Libre de Eméritos me encargó la elaboración de un informe acerca de los libros de texto de Matemáticas en el bachillerato español. Y con ese fin se seleccionaron los libros de las tres editoriales que tienen mayor difusión en España. El propósito principal del informe era someter esos textos al análisis de un matemático profesional para evaluar la corrección, relevancia y pertinencia de sus definiciones, demostraciones, resultados y aplicaciones. Pero también para constatar si el libro engancha, si contiene una voz sabia que va orientando al lector, subrayando los diversos conceptos importantes y sus relaciones mutuas, mostrando cuáles son los teoremas y resultados clave y cómo nos sirven para entender problemas interesantes; o si, por el contrario, se trata de una simple colección de apartados más o menos inconexos.

El informe, que tiene unas cuarenta páginas, está publicado en la página web del Colegio, pero creo apropiado enunciar un somero resumen de sus conclusiones:

- Las calidades del papel, impresión y colorido de los textos españoles son bastante buenas. No son libros de autor, sino de equipos de varios autores a los que hay que añadir los directores editorial, artístico y técnico; junto a responsables de imagen, documentación y selección fotográfica, entre otras varias denominaciones.
- Llama la atención la gran cantidad de definiciones, no siempre relevantes, aunque a menudo incorrectas, que suelen aparecer subrayadas o enmarcadas en color, transmitiendo la impresión, que juzgo errónea, de que el conocimiento matemático radica, en gran medida, en saber nombrar.
- Las demostraciones han sido mayoritariamente suprimidas, escamoteándose el carácter deductivo de las matemáticas que es, probablemente, una de las más genuinas contribuciones de esta ciencia a la formación del futuro ingeniero, médico o científico, objetivo principal del bachillerato de Ciencias.
- Se da un protagonismo excesivo a algunos temas cuya enjundia matemática es cuestionable. Un ejemplo es la llamada regla de Ruffini, otro es la discusión de los sistemas de ecuaciones lineales, que forma parte substancial del programa del curso segundo porque, entre otras razones, da lugar a una pregunta fija en las pruebas de selectividad.
- El cálculo diferencial, cuyo estudio se inicia en estos cursos de bachillerato, es un área en la que parecería apropiado

> diversificar, ofreciendo a los mejores estudiantes una versión algo más ambiciosa, como se hace en los textos franceses o en la serie *Further Mathematics* que los colegios ingleses dedican a los estudiantes que optan a ser admitidos en sus mejores universidades.

De su propia lectura, y luego de la comparación con los libros franceses e ingleses, me quedó la desagradable impresión de que los textos españoles son muy mejorables, incluso podríamos decir que bastante deficientes. Saliéndonos un poco del marco que me había propuesto en el informe, no puedo evitar preguntarme qué cabría hacer y quién podría estar en condiciones de llevarlo a cabo. Pero, lamentablemente, no creo poder señalar a un timonel concreto; alguien, persona o colectivo, a quien hubiera que convencer para que la situación mejore. No obstante, sí podemos mencionar algunos candidatos, empezando por las editoriales. Resulta obvio que los libros de texto constituyen una parte substancial de su negocio, y que compiten en un mercado de demanda asegurada, pero eso no debería impedirles buscar la excelencia para tener ventaja sobre sus competidores. Luego están los equipos de escritores, que seguramente obtienen la parte alícuota correspondiente del beneficio editorial y que tratarán por todos los medios de no perderla, pero no creo razonable pensar que estos equipos tengan la fuerza suficiente para imponerse si hubiera otras alternativas. Tenemos también a los usuarios, los profesores de bachillerato, que no parece que hayan generado protesta alguna y para quienes los libros de texto no estarán, seguramente, entre sus problemas más perentorios; y aunque las revistas de sus sociedades suelen incluir recensiones de libros, no he encontrado en ellas ningún estudio sistemático y crítico de los textos de bachillerato. Finalmente están los profesores universitarios que, año tras año, diseñan unos exámenes de selectividad en los que, por ejemplo, la discusión de un sistema a la Rouché-Frobenius parece ser un objetivo fundamental, y que formarán parte, es de suponer, de las comisiones de expertos que elaboran los programas, métodos y objetivos que son publicados en el BOE.

Me parece que se trata de un punto importante en el que podría incidirse con cierta eficacia para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en España: promover la escritura de textos por investigadores de prestigio y dirigidos tanto a los alumnos de esos primeros niveles como a sus profesores, eliminando esos vicios señalados y transmitiendo la aventura intelectual que representa el aprendizaje de las Matemáticas.

A mi vuelta de la Universidad de Princeton, durante algunos años, fui el único catedrático de Matemáticas en la UAM, lo que me hizo formar parte de muchas más comisiones de las que hubiera sido prudente pertenecer. Una de ellas tenía la misión de diseñar el examen de acceso a la Universidad para los mayores de veinticinco años. Allí me encontré junto a catedráticos de otras áreas del saber, casi todos más veteranos que yo. Cuando llegó mi turno y propuse como tema «áreas y volúmenes», mis avezados colegas se llevaron las manos a la cabeza y me acusaron de ser excesivamente duro al proponer algo tan difícil. De nada valió que adujese que pedía tan sólo escribir lo que supieran acerca de formas tan comunes como son un triángulo, un polígono o un círculo en el plano, o bien de cilindros, conos, pirámides y esferas en el espacio. A todos ellos les pareció mi propuesta algo ardua y desproporcionada. Pero mi sorpresa llegó cuando el economista propuso «El concepto de plusvalía en Karl Marx» y el literato se largó con un tema de literatura comparada catalana-castellana a propósito del *Tirant lo Blanch*. Siendo aceptados por todos, naturalmente, como algo que debía pertenecer al acervo cultural de cualquier ciudadano medianamente instruido, en contraposición con esas esquinadas y difíciles áreas y volúmenes, de cosas tan esotéricas como pueden ser una pirámide o una esfera.

En otra memorable ocasión, formé parte en mi universidad del comité encargado de proponer los temas de la prueba de selectividad de aquel año. En la reunión que mantuvimos, el catedrático de Filosofía se largó un discurso muy crítico con el Gobierno de entonces a propósito de que se hubiera simplificado el temario de su materia, instándonos a incluir a Wittgenstein, cuya exclusión le parecía intolerable.

Ocurre que desde mis tiempos de bachiller, y por influencia de una de mis profesoras que puso su biblioteca a mi disposición, había leído yo con avidez a Bertrand Russell y también me había atrevido con el *Tractatus logicus philosophicus* de Wittgenstein. Conocía las polémicas en torno a su publicación y también que el propio Wittgenstein lo consideraba un tanto oscuro y de difícil comprensión, habiendo escrito en carta a su amigo Russell: «es amargo pensar que nadie lo entenderá aunque se publique». Años después, y provisto de un mayor bagaje en lógica, volví a leer esa colección de aforismos: algunos son muy ingeniosos, como ese que cierra el libro afirmando «de lo que no se puede hablar es mejor callar», pero otros muchos no son sino meras rutinas de lógica matemática; por lo que no me parece tan evidente que se trate de una obra fundamental de obligado conocimiento para nuestros bachilleres. De manera que me atreví a citar partes del *Tractatus* en aquella reunión, y a disentir sobre su idoneidad en las pruebas de selectividad. Para mi sorpresa, mis palabras dieron lugar a un silencio total, se me dio la razón sin volver a mencionar el tema y, por una vez, experimenté la impresión que causa en la gente, incluidos mis colegas de comisión, que un matemático diga que ha entendido algo y que saca sus consecuencias.

Siempre me ha parecido artificial esa supuesta contraposición entre las ciencias y las letras, y me parece un despropósito que se considere inculto a quien no está al tanto de la poesía de Góngora, pero no a quien desconoce las matemáticas del siglo XVII. Creo que es una tontería demasiado generalizada en nuestro país, y de pésimas consecuencias para la educación de los ciudadanos, ese alarde público que a veces llevan a cabo algunos escritores y artistas, proclamando ignorancias matemáticas que harían sonrojar a cualquiera si de su contrapartida literaria se tratase. No obstante existe un porcentaje nada desdeñable de ciudadanos que, sin disponer de una extensa formación matemática, se sienten fascinados por algunos de sus problemas más populares a los que dedican tiempo y energías, llegando incluso a obsesionarse con ellos.

Desde que Andrew Wiles logró culminar la demostración del «último teorema de Fermat» (no hay solución de enteros positivos de la ecuación $x^n + y^n = z^n$, para $n \geq 3$), ha disminuido el número de aficionados que pretenden tener una prueba. Pero antes fui sufrido e involuntario lector de varias demostraciones cuyos autores estimaban correctas y merecedoras de la gloria que la solución conlleva pero que, por la simpleza de los métodos, resultaba obvio para un matemático profesional que no resistirían el más mínimo análisis. En general, suelo tratar a estos aficionados con cortesía y cierto esmero, ya que comparto y entiendo la fascinación que esos problemas les producen, y además siempre queda la duda de si estaremos ante un nuevo Ramanujan, ese genio indio que allá en su aldea natal, próxima a Madrás, fue capaz de inventar por sí solo, sin ayuda de nadie, gran parte de las matemáticas conocidas y descubrir interesantes resultados nuevos. Pero, a menudo, esa actitud me ha supuesto una cierta pérdida de tiempo ya que todos insisten en venir a verme personalmente y evitan enviar el manuscrito por correo, a pesar de haberlo hecho casi siempre registrar por notario antes de entregármelo. Dispongo sobre este asunto de una rica colección de anécdotas, toda una experiencia que podría titularse *Fermat y yo.* He aquí algunas de mis favoritas.

Una vez, hacia finales de los ochenta, recibí una llamada desde una ciudad del Mediterráneo de alguien que afirmaba tener una prueba del fermat y me pedía una entrevista para mostrármela. No hubo manera de convencerle de que antes de hacer el viaje a Madrid era mejor que me enviara el manuscrito por correo. De manera que le di cita para un día en mi despacho, a la que acudió junto a otro señor que esperó pacientemente fuera. Entonces me enteré de que mi visitante era un abogado, concejal del ayuntamiento de su ciudad, y aficionado a las matemáticas, casi como el propio Pierre de Fermat, pero con la enorme diferencia en su contra de carecer de una sólida base científica. Lo normal es que descifrar un manuscrito lleve un cierto tiempo, pero en este caso resultó todo muy simple ya que en la segunda página se leía la afirmación de que un racional era el siguiente, en el orden de menor a mayor, de otro número. De manera que le pedí señalar el siguiente de 1/2 y me escribió 2/3; lo que rebatí señalando 3/5…, y así sucesivamente. Le llevó un rato aceptar que no existe ese siguiente en el que estaba basada su demostración. Me dijo entonces que trataría de remediarlo en una próxima versión de su prueba, y que la persona que se encontraba esperando fuera era un fotógrafo dispuesto a inmortalizar el momento en el que yo debería haber estrechado su mano en reconocimiento de la hazaña. No obstante, me informó que eso tendría un arreglo fácil, pero lo que iba a ser un asunto más difícil, que seguramente le costaría un abrigo de visón, era recuperar la admiración de su esposa, quien también le había acompañado a Madrid, y probablemente habría escuchado con estoicismo sus alardes matemáticos.


Pierre de Fermat (1601-1655)

En otra ocasión me llamaron por teléfono, desde una ciudad de Cataluña, con el mismo objetivo: la demostración del fermat y su posible publicación en la *Revista Matemática Iberoamericana*. Tampoco en este caso fue posible que el autor enviara el manuscrito por correo. Así es que se presentó en mi despacho de la Universidad en la fecha convenida, donde le recibimos los dos directores de la *Revista*. Pero no se trataba de una demostración, sino de una supuesta «idea novedosa» que pretendía desarrollar. En realidad lo que esta persona había descubierto era la generación de las ternas pitagóricas, es decir de todas las ternas (a, b, c) de números enteros positivos tales que $a^2 + b^2 = c^2$, o de todos los triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitud entera, y pensaba que esa deducción podría ser utilizada para atacar el fermat.

Le informamos de que tal descubrimiento era algo que ya sabían los pitagóricos de hace veintitantos siglos y que, aunque nos parecía meritorio que hubiese sido capaz de volverlo a encontrar por su cuenta, esa información había estado presente en la mente de todos los matemáticos que habían contribuido al fermat a lo largo de los siglos, por lo que sería pretencioso ahora iniciar la aventura de hallar la demostración sin otra base de partida.

Le sugerimos que leyera a los clásicos y le facilitamos una bibliografía de Teoría de Números y otras posibles lecturas para la licenciatura en Matemáticas que deseaba iniciar en la Universidad a Distancia. Entonces nos dijo que él era muy catalanista, por lo que, antes de dirigirse a la Universidad de Madrid, lo había intentado en la de su país. Pero allí el/la catedrático/a del área le había dicho que su pretensión con el fermat era, en términos del baloncesto, equivalente a querer jugar en la NBA, y que eso necesita de muy buenas cualidades y una esmerada preparación; que él/ella no solía molestar a otros con sus ideas más peregrinas y que, en reciprocidad, no tenía tiempo para las de los demás. Al despedirse nos agradeció el trato cordial que le habíamos dispensado en Madrid, a diferencia del que creía haber recibido en su tierra, y también nos dijo que eso, a un independentista como él, le daba que pensar.

Naturalmente que atesoro muchas otras historias y anécdotas adquiridas a lo largo de mi carrera en torno a cuestiones famosas como son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo, el problema de los puntos del retículo o el mencionado «último teorema de Fermat», que atestiguan la fascinación que pueden producir en muchos ciudadanos. En algunas ocasiones las historias se desarrollaron en términos algo menos divertidos, pero he escogido estas dos porque muestran muy claramente, creo yo, cómo la vida y las convicciones políticas aparecen también mezcladas con las matemáticas, a veces de manera un tanto sorprendente.

4.
Investigación matemática

Huye de los caminos concurridos, ve por los senderos.

Pitágoras

En sentido estricto, el objetivo primordial de la investigación es la producción, creación o descubrimiento de resultados, nuevos y relevantes, que añadir a las matemáticas; hacer avanzar la frontera del conocimiento, afilar y potenciar los instrumentos de cálculo y analizar la estructura de las teorías científicas, certificando su posible consistencia y obteniendo las consecuencias lógicas y las previsiones numéricas que originan.

La palabra *problema* tiene aquí un sentido algo distinto del que suele recibir en otros ámbitos: un problema no es considerado algo inconveniente, malo o fastidioso. Todo lo contrario, los matemáticos deseamos encontrar o formular buenos problemas, porque es la mejor manera que conocemos de obtener proposiciones y teorías interesantes. El adjetivo «relevante» es fundamental en la descripción de un resultado, y no basta con su novedad. Supongamos, por ejemplo, que alguien considera el cociente entre el número de goles marcados por el Barcelona y el Madrid en la temporada pasada para, a renglón seguido, extraerle su raíz cúbica calculando la cifra decimal que ocupa el lugar milésimo noningentésimo nonagésimo nono. Obtendría así un dígito que seguramente nadie habría calculado antes, siendo por tanto una observación aritmética novedosa. Pero no sería en absoluto relevante, ni podríamos considerarla una aportación al conocimiento matemático.

En líneas generales, existen dos importantes motores de la investigación: responder a las cuestiones planteadas en otras disciplinas (física, química, biología, economía, ingeniería…), y perfeccionar los propios instrumentos y teorías. Hay quien distingue entre matemáticas «puras» y «aplicadas», pero esa distinción dista mucho de producir una línea precisa y nítida de separación. El XVIII fue uno de sus grandes siglos, cuando aquellos ilustrados capitaneados por Euler y Lagrange las convirtieron en la ciencia de vanguardia, aplicando el cálculo inventado el siglo anterior por Newton y Leibniz para establecer las leyes y los modelos de la mecánica. Entonces se distinguía entre «puras» y «mixtas», abarcando esta última denominación a varias partes de la física tales como hidrodinámica, pirología, óptica o neumatología. En tiempos recientes, y debido a la irrupción de los ordenadores potentes que nos permiten hacer cálculos que antes resultaban impensables, la noción de *matemática aplicada* ha adquirido unas características más precisas.

La tarea de los matemáticos es, por su propia índole, reduccionista, y una estrategia que ha sido utilizada con éxito notable ha sido la de simplificar los modelos de la ciencia, reduciendo sus dimensiones espaciales o el número y la complicación de las ecuaciones y funciones involucradas para obtener otros modelos más sencillos en los que lograr teoremas profundos que, se espera, reflejen el comportamiento de los más complicados y realistas. Pero la aparición de los ordenadores potentes permite ahora que muchos modelos puedan ser abordados en toda su complejidad, no tanto para demostrar teoremas (que ¡ojalá!), sino para hacer uso de profundas teorías analíticas y numéricas que permiten hacer simulaciones de experimentos que, por otra parte, serían muy costosos, difíciles o imposibles de llevar a cabo. De manera que dentro de la denominada matemática aplicada cabe demostrar buenos teoremas (aunque eso siempre resulte ser una tarea muy difícil) sobre los modelos de la ciencia en versiones genuinas, aunque quizás algo simplificados, pero también llevar a cabo simulaciones y experimentos numéricos sobre modelos más realistas y complejos.

No hay que realizar un gran esfuerzo para convencernos de que las aplicaciones de las matemáticas son mucho más abundantes ahora que en tiempos anteriores. No sólo en la tradicional interacción con la física, en donde estamos de nuevo en un período de convergencia, que esperemos que no sea también de colisión, sino en otras áreas hasta ahora insospechadas como pueden ser la tomografía, las aplicaciones de la teoría de números al cifrado de mensajes o el uso de la homotopía para clasificar los defectos en los cristales. La transformación de Fourier está en la base del funcionamiento de muchos instrumentos tales como el TAC y los aparatos de resonancia magnética nuclear, pero también en la interpretación de las ondas sísmicas, o en la exploración de los yacimientos petrolíferos. El reciente descubrimiento de las estructuras cuasicristalinas con simetría pentagonal y su explicación en términos de los enlosados de Penrose y los conjuntos armoniosos de buena difracción es, por otro lado, un ejemplo notable de anticipación matemática.

Pero lo *aplicado* sigue siendo un concepto esquivo, por cuanto teorías que surgieron de la mera curiosidad intelectual, luego, con el paso de los años o de los siglos, acabaron siendo cruciales para entender la naturaleza y poder dominarla. Un ejemplo notable son las secciones cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas), cuyas propiedades geométricas investigaron los matemáticos alejandrinos del tiempo de Apolonio pero que, siglos más tarde, resultaron ser las trayectorias de los cuerpos celestes según nos enseñó el gran Newton. La supuesta oposición entre «puras» y «aplicadas» es también un asunto recurrente acerca del cual se han expresado en el pasado, y aún se sigue haciendo, opiniones muy dispares. Sirvan de muestra las dos siguientes, una del «aplicado» Fourier y otra del «idealista» Jacobi:

> *El estudio profundo de la naturaleza es la mina más fértil de descubrimientos matemáticos.*
>
> Joseph Fourier

> *Es cierto que Fourier opinaba que el principal objetivo de las matemáticas radica en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debe saber que el único objetivo de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, desde ese punto de vista, un problema de teoría de números es tan valioso como otro sobre el sistema del universo.*
>
> Carl Gustav Jacobi

Otra cuestión interesante que ha dado lugar a diversos ensayos y reflexiones es si las matemáticas se crean o se descubren. El platonismo matemático afirma que los objetos y los conceptos tratados por las matemáticas no son simples invenciones, existentes solamente en la mente de sus creadores e iniciados, sino que son realidades objetivas, inmateriales y atemporales. El formalismo, por el contrario, afirma que la imaginación, la creatividad y la capacidad de abstracción humanas son capaces de producir, idear y pensar matemáticas de manera independiente de los entornos vitales y de las características personales. Me parece, no obstante, que la mayoría de los investigadores tendemos a ser algo platónicos y que nuestro universo matemático suele estar habitado por cantidad de entes, tales como números, secciones cónicas, funciones analíticas, integrales singulares, series trigonométricas, ecuaciones diferenciales, procesos estocásticos o espacios topológicos, de cuya existencia real acabamos estando bastante convencidos. Pero resulta siempre conveniente tener en cuenta la opinión de los grandes:

> *Las matemáticas son el idioma de la naturaleza.*
>
> Galileo Galilei

> *¿Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se ajuste de modo tan perfecto a los objetos de la realidad física?*
>
> Albert Einstein

El milagro de la articulación entre el lenguaje, la matemática y la formulación de las leyes de la física es incomprensible y hasta de una exclusividad inmerecida para nosotros los físicos: valdría la pena extenderlo a todas las ramas del conocimiento.

Eugene Wigner
La irrazonable eficacia de las matemáticas

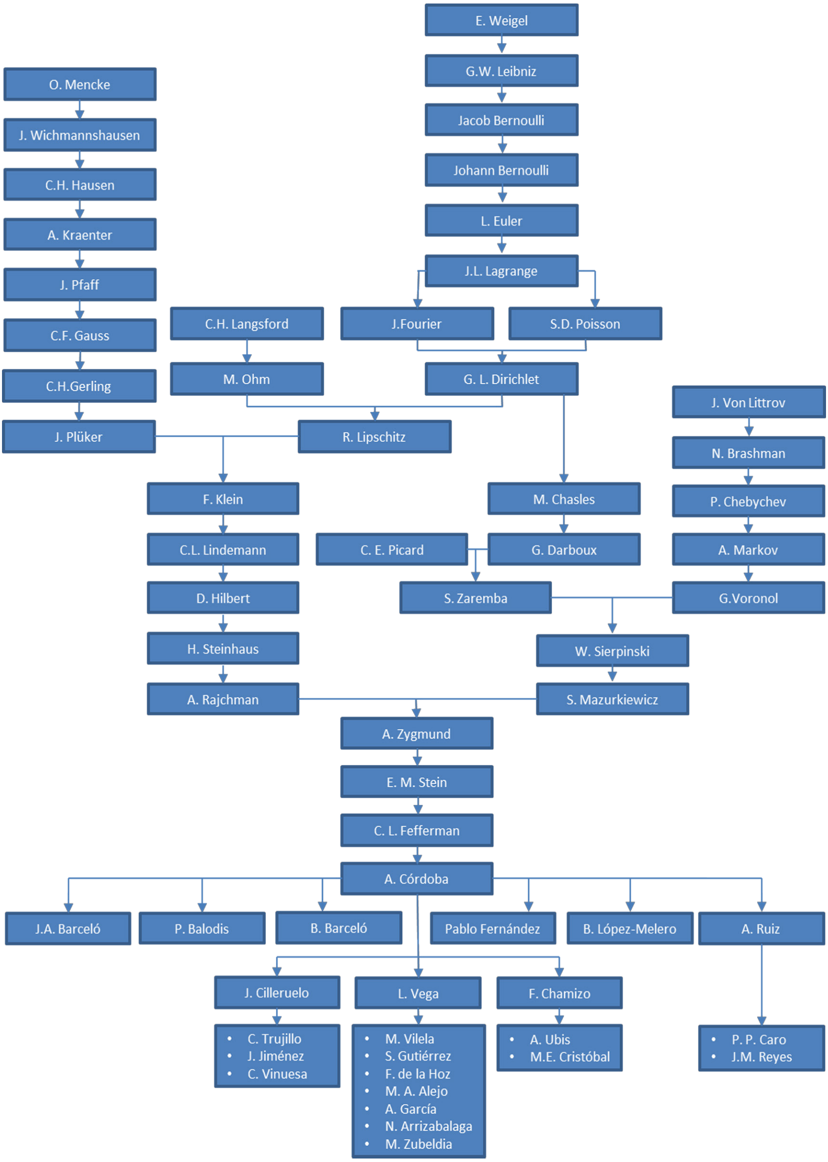
Cualquier matemático profesional puede, a través de su propia experiencia y conocimientos de las publicaciones, mencionar (o producir) problemas cuya solución sea nueva y relevante. Esto es relativamente fácil, lo que resulta ser más difícil es enunciar un problema nuevo y significativo que al mismo tiempo sea asequible, o que esté dentro de las posibilidades del investigador encontrarle una solución en un plazo prudente de tiempo.

El número de matemáticos realmente activos en investigación en todo el mundo es relativamente pequeño, en torno a unos diez mil. Lo que teniendo en cuenta que según el *Mathematics Subject Classification* del año 2000 hay más de cien áreas, resulta que la cantidad de investigadores por cada una es bastante reducida. El volumen total de publicaciones anuales está en torno a unos 25 000 artículos, publicados en las aproximadamente 300 revistas recogidas en el índice ISI, en las que el porcentaje de un autor español superó el 4% en el año 2012, lo que resulta ser un dato muy elocuente si es comparado con el 0,4% del año 1980, y describe el notable crecimiento que ha experimentado, en solo tres décadas, la producción de los matemáticos españoles.

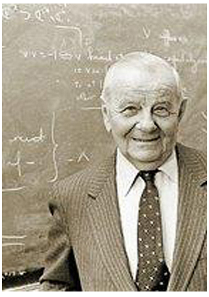
A diferencia de lo que ocurre en otras disciplinas, aquí la actividad está muy localizada en las universidades, por lo que no puede independizarse de los programas de doctorado y estos, a su vez, tienen una influencia capital en el futuro de la investigación. Las matemáticas son, en mayor medida que otras ciencias, un oficio de jóvenes: la actividad, la ambición y el interés de los doctores recientes son del todo indispensables. La relación que se establece entre el profesor, director de la tesis, y el doctorando aprendiz es muy especial. El director enseña realmente el oficio a su alumno, mostrándole las técnicas, las intuiciones y la sabiduría que manejan los expertos del área, y que no es fácil desentrañar en la literatura pero, sobre todo, ofrece al estudiante un abanico de problemas interesantes para investigar, casi siempre surgidos de los proyectos en los que el propio director está trabajando. El total de tesis doctorales leídas en el año 2011 fueron, aproximadamente, 7000 en *USA* y 150 en España.

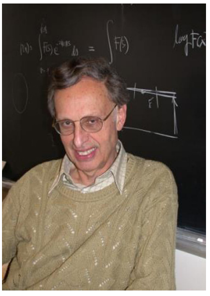
Resulta por tanto muy indicativa de la estructura mundial de las matemáticas la configuración de los «árboles genealógicos». Estos pueden ser consultados fácilmente en internet gracias a la iniciativa de la Universidad de Minnesota a través de su *Minnesota Genealogy Project*. El padre, o madre, académico es quien dirija la tesis, los hijos son los estudiantes de doctorado y de ahí en adelante podemos hablar de abuelos, nietos y demás familia. Aunque en sentido estricto las tesis doctorales son un producto de la Ilustración, los autores del programa han considerado razonable añadir aquellos casos como los de Leibniz con los Bernoulli, o Euler con Lagrange, en los que no puede hablarse de una tesis doctoral pero sí de una influencia decisiva y de una relación análoga a la del doctorando con su director de tesis. En la página siguiente está representado mi propio árbol genealógico.

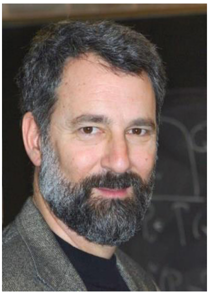
Aunque me pueda considerar legítimamente orgulloso de tener tales antepasados y sucesores, que constituyen una auténtica aristocracia intelectual en la que encontramos, entre otros, a Leibniz, los hermanos Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier, Gauss y Hilbert, la realidad es que si buscamos en el programa de Minnesota a cualquier matemático activo, su árbol resultará probablemente muy parecido. Esto nos da una información muy interesante acerca del oficio de las matemáticas y de su universalidad: hallamos una gran variedad de nacionalidades (alemanes, franceses, polacos, rusos, norteamericanos…), y se manifiesta la escasa presencia femenina; pero podemos apreciar cómo esta aumenta



en las generaciones más jóvenes, como también ocurre con la de los españoles. Además de esos gigantes de la ciencia que hemos mencionado, también lo enriquecen el resto de sus componentes como, por ejemplo, son los casos de Lindemann, quien demostró la trascendencia del número π, que resolvió el famoso problema sobre la imposibilidad de la cuadratura del círculo con regla y compás; o de Poisson, quien contribuyó de manera tan decisiva a establecer la teoría ondulatoria de la luz y cuyo nombre aparece asociado a tantos problemas importantes. El árbol contiene pues mucha ciencia, pero también violencia, como fue la sufrida por mi tatarabuelo, Alexander Rajchman, quien murió en los trágicos episodios del gueto de Varsovia; o mi bisabuelo, Antoni Zygmund, quien emigró en aquellos años dramáticos en los que, sin embargo, florecía en Polonia una pléyade matemática que fue machacada por la guerra. En los Estados Unidos, Zygmund fundó la escuela de análisis de Chicago (de la que surgieron figuras como Alberto Calderón, Paul Cohen o Elias Stein), y donde tuve el privilegio de tratarle y gozar de sus consejos y sabiduría. Pero también supe de su rabia y sus lamentos por la pérdida de Józef Marcinkiewicz, alumno de doctorado de Zygmund y genio del análisis, que murió en la masacre de oficiales polacos perpetrada por el ejército soviético en el bosque de Katyń.

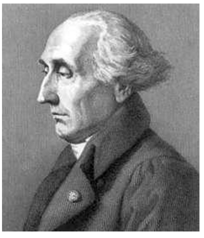

A. Zygmund (1900-1992)


E. M. Stein


C. Fefferman


G.W. Leibniz (1646-1716)


C.F. Gauss (1777-1855)

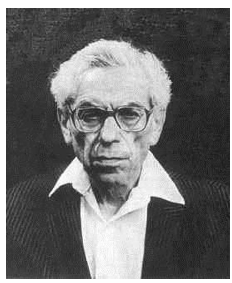

J.L. Lagrange (1736-1813)


D. Hilbert (1862-1943)

En la red puede también obtenerse mucha información acerca de la naturaleza del oficio. Por ejemplo, en la página web *MathSciNet* de la *American Mathematical Society* se puede hallar la distancia entre colaboradores introduciendo en su buscador el nombre de dos matemáticos: el programa nos revela el camino más directo que conecta a uno con otro a través de publicaciones comunes. Salvo en casos aislados que carecen de colaboradores, lo normal es que ese camino resulte ser muy corto, de menos de diez pasos, aunque en un extremo pongamos a Gauss o alguien de un área muy distinta de la propia. He aquí unos ejemplos:

- A. Córdoba → J. Cilleruelo → I. Ruzsa → E. Strauss → A. Einstein.
- A. Córdoba → L. Seco → V. Ivrii → M. Shubin → M. Gromov → G. Perelman.
- A. Córdoba → L. Caffarelli → H. Brezis → J. Coates → A. Wiles.
- A. Córdoba → C. Fefferman → M. Ash → P. Erdős.

La última sucesión tiene que ver con el llamado «número de Erdős», que está definido de la siguiente manera: Erdős tiene el número 0; aquel que haya publicado un artículo de investigación en colaboración con Erdős adquiere el número 1 y, en general, se trata de contar los eslabones de la cadena de colaboración más corta que conecta a alguien con Erdős. Resulta que la mayoría de los investigadores poseen un número muy bajo, como muestra la cadena anterior ilustrando que el mío sea 3. He aquí los números de Erdős de algunos matemáticos citados en estas páginas: Charles Fefferman (2), Andrew Wiles (3), Grigori Perelman (3). Y no solo matemáticos: Einstein tiene número de Erdős 2, mientras que Stephen Hawking tiene un 4; con 4 están también el lingüista Noam Chomsky y el fundador de Microsoft Bill Gates. Hasta actrices como Natalie Portman tienen número de Erdős finito (5, en este caso).


P. Erdős (1913-1996)

Paul Erdős, nacido en Hungría, ha sido uno de los matemáticos más singulares del siglo XX. A su proverbial talento aritmético hay que añadir un carácter y un estilo de vida un tanto peculiares, que han sido relatados en el libro biográfico que escribió Paul Hofmann: *El hombre que solo amaba los números.*

Viajaba de campus en campus, alojándose en casa de sus colaboradores, adonde solía presentarse sin previo aviso. Carecía de domicilio fijo, ni de ningún tipo de posesión material, salvo una maleta con sus pertenencias con la que recorría el mundo. Casi todo el dinero que recibía por sus conferencias lo repartía entre otros, o bien lo usaba para pagar las recompensas que iba ofreciendo a quienes resolvían sus problemas favoritos. Afirmaba, además, que esa actitud hacia el dinero no la tenía por generosidad, sino porque preocuparse de los asuntos materiales le resultaba un fastidio enorme que le distraía de las matemáticas.

Publicar o perecer

Una investigación que cuente, al menos en el ámbito académico, es la que es publicable en una revista de buena reputación, donde el trabajo sea analizado por expertos (*referees*). Existen varios cientos de revistas, entre las cuales hay algunas decenas que mantienen un prestigio muy alto, de manera que un artículo publicado en ellas representa que estamos ante un problema muy relevante que ha sido resuelto con métodos innovadores. Luego hay otras muchas donde el nivel va descendiendo ostensiblemente en cuanto a la enjundia del problema y lo innovadora de su demostración aunque, en general, siempre se supone que el resultado en sí mismo, o por los métodos introducidos, tiene que ser original.

La mayoría de quienes publican en estas revistas son aquellos que saben hacerlo de manera correcta y consistente. Los buenos artistas se sienten atraídos por problemas importantes y difíciles, en torno a los que aprenden y crean las técnicas necesarias para resolverlos. Los meros artesanos, por otro lado, se caracterizan por limitarse a usar las matemáticas que ya conocen, buscando solo problemas que puedan ser resueltos con sus métodos. Esto significa, naturalmente, que gran parte de ese trabajo artesano termine siendo algo forzado, con resultados muy técnicos y no demasiado interesantes. Y que no sean necesariamente los matemáticos más productivos o, mejor dicho, los que tienen un número mayor de artículos publicados, quienes hacen avanzar realmente la ciencia.

El uso de un lenguaje propio tan preciso representa una indudable ventaja que ha ayudado a mantener el carácter global y el estilo inequívocamente internacional de la comunidad matemática, sin que hallemos en ella barreras lingüísticas ni políticas. La colaboración entre dos o tres autores de nacionalidades distintas es algo muy normal y frecuente. Sin embargo, proyectos de grupos más numerosos, de uno o varios países, para conseguir unos objetivos específicos resultan ser *rara avis*. Dándose con frecuencia, por el contrario, los casos de avances importantes obtenidos por el trabajo solitario de algunos investigadores, como han sido los ejemplos recientes de Wiles (último teorema de Fermat) o Perelman (conjetura de Poincaré). A pesar de ello, la investigación matemática es una actividad social: la decisión de un investigador particular de explorar una dirección determinada proviene muy a menudo del interés y del estímulo recibido de otros.

La comunicación es el laboratorio de los matemáticos, cuya investigación involucra normalmente la crítica y la ayuda de diversos colegas. Por estas razones, mantenerse activos suele requerir la realización de muchos viajes; participar en congresos, *workshops* y visitar los centros de excelencia del mundo. No obstante, la irrupción de internet ha cambiado un tanto el panorama, propiciando colaboraciones a distancia sin necesidad de desplazamientos, y facilitando el intercambio de información. Las matemáticas han sido, y siguen siendo, una ciencia «barata», que no precisa de las grandes inversiones en máquinas y laboratorios que son necesarias en física de altas energías o en biología molecular. En líneas generales las infraestructuras necesarias se reducen a tres tipos: bibliotecas, medios de cálculo y personal auxiliar de secretaría.

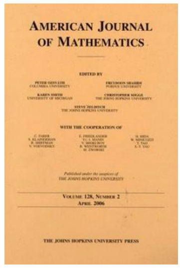
En estos tiempos cada investigador suele tener su área de especialización, mientras que los grandes del pasado (Euler, Gauss) estaban al tanto de todo lo que se producía. Algunos actuales, como Charles Fefferman, han contribuido con resultados fundamentales en diversos campos y se dice que H. Poincaré, quien murió en 1912, fue la última persona que «entendió» realmente todas las matemáticas. Pero un autor de ahora suele considerarse experto en solo un campo particular (hay más de cien en el índice de la *American Mathematical Society*) y, en general, produce artículos de investigación que son leídos por muy poca gente. No obstante, en las universidades más importantes se estima que todos, profesores, alumnos y la propia institución, salen beneficiados de la escritura de artículos y estos son importantes a la hora de las promociones, así es que hay una proliferación de publicaciones que son pulcras, normalmente correctas, y bastante prescindibles.

Las revistas han desempeñado un papel crucial en la propagación de la ciencia y, desde la Ilustración, disponemos de varios ejemplos históricos sobresalientes que muestran el cuidado que los matemáticos han puesto siempre en la escritura correcta y en la propagación de sus ideas y descubrimientos. He aquí una pequeña selección: *Acta Eruditorum,* fundada por Otto Mencke y Gottffried Leibniz en el año 1682¸ fue la primera revista de carácter científico de la historia alemana y en ella colaboraron Isaac Newton, el mismo Leibniz, los hermanos Bernoulli, Simon Laplace o Christiaan Huygens, entre otros, publicando muchos artículos pioneros que fueron hitos en el desarrollo del cálculo infinitesimal; en Francia tenemos el *Journal des Mathématiques Pures et Appliqués,* también llamado *Journal de Liouville,* quien fue su fundador en 1836; el *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, que es conocido como *Journal de Crelle* en honor de August Leopold Crelle, quien lo creó en 1826 en la ciudad de Berlín; *Acta Mathematica,* la gran revista sueca fundada por Gösta Mittag-Leffler en 1882; *American Journal of Mathematics,* publicado por la Universidad de Johns Hopkins desde el año 1878, siendo James Sylvester su primer editor; y finalmente *Annals of Mathematics*, publicada en Princeton por la Universidad y el *Institute for Advanced Study,* desde 1874.

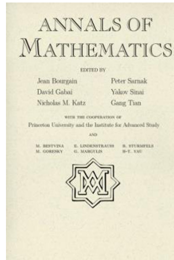
Excepto la primera, que dejó de publicarse en 1782, el resto sigue gozando de una buena salud y sus páginas han sido vehículos y testigos privilegiados de los mejores resultados de la investigación matemática. Existen muchas más revistas, en torno a trescientas, que las agencias de evaluación suelen ordenar por su índice de impacto, criterio que, en general, resulta ser más apropiado en otras disciplinas, donde la «vida media» de un artículo puede ser muy corta, a diferencia de lo que ocurre en matemáticas. Pero, en cualquier caso, las anteriormente mencionadas suelen siempre ocupar los primeros puestos y, junto a las otras cincuenta o sesenta primeras del escalafón, garantizan que los artículos en ellas publicados sean interesantes y originales. Desde nuestra perspectiva nacional, podemos señalar que la *Revista Matemática Iberoamericana,* editada por la Real Sociedad Matemática Española desde el año 1985, forma parte de ese grupo distinguido de buenas revistas, y que desde el año 2012 es también una publicación de referencia de la *European Mathematical Society*, cuya editorial se encarga de su distribución.

Acta Mathematica

Acta Eruditorum

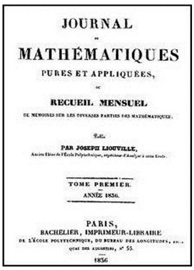


American Journal of Mathematics

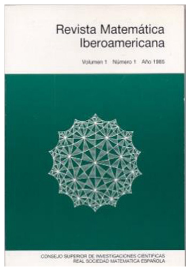


Annals of Mathematics

Journal de Crelle



Journal de Liouville



Revista Matemática Iberoamericana

Revista Matemática Iberoamericana

Los artículos recibidos por los editores son evaluados luego por investigadores del área, quienes han de certificar su corrección e interés, lo que supone un notable esfuerzo y un trabajo no remunerado por parte de los recensores. Se trata de un proceso lento, de manera que entre la escritura de un artículo y su publicación pueden transcurrir varios años, por lo que existen ahora lugares de internet (los *arXiv*, uno por cada área), donde los expertos anuncian, «cuelgan», rápidamente sus resultados. Así es que las revistas, o al menos las mejores de ellas, no son ya tanto un vehículo de comunicación y difusión de resultados, sino más bien una garantía, un marchamo de calidad, por cuanto la publicación en papel implica que el trabajo haya sido eficientemente evaluado.

A diferencia de otras áreas, los investigadores no tienen que pagar por la publicación de sus escritos, y la edición, hasta tiempos muy recientes, ha sido una actividad de carácter artesanal, sin ánimo de lucro, sustentada en la labor altruista de los editores y recensores, y asociada a los departamentos universitarios y a los institutos de investigación. Pero hay indicios elocuentes de que esa situación está cambiando: por un lado encontramos el impacto de internet, de los procesadores de texto que facilitan tanto la escritura, así como la aparición de nuevas publicaciones digitales; por otro tenemos el gran incremento que el número de investigadores ha experimentado en países como China o Corea, que repercute en el aumento casi exponencial del flujo de artículos y que hace cada vez más difícil el tratamiento artesano tradicional. Está también la irrupción de las grandes editoriales (Springer, Birkhaüser, Elsevier), que han ido absorbiendo a muchas de las revistas clásicas, o creando otras nuevas muy especializadas, y que imponen unos precios y unas condiciones leoninas que dañan la economía de las bibliotecas departamentales. Por lo que han surgido ya varios movimientos de resistencia, objeción y oposición a estas grandes editoriales, que hacen prever cambios sustanciales en el sistema de publicaciones que ha estado vigente en las matemáticas desde los tiempos de la Ilustración.

Teorías

Toda teoría matemática comienza con uno o varios problemas o preguntas de un interés especial. Por ejemplo:

1) ¿Podemos hallar fórmulas para calcular las raíces de los polinomios?
2) ¿Hay infinitos números primos de Fermat?
3) ¿Cómo se propaga el calor?
4) ¿Cuántas paralelas a una recta dada pueden trazarse desde un punto exterior?
5) ¿Cuál es el conjunto plano de área mínima en el que se puede mover una aguja hasta invertir su posición?
6) ¿Acaso tienen dirección los vientos?

En la búsqueda de respuestas pueden darse varias posibilidades: a veces el problema nos lleva a una teoría general fecunda; en otras, el esfuerzo no nos ha conducido todavía a ninguna parte y la teoría resta por hacer. O quizás sólo hayamos obtenido resultados parciales, quedando aspectos fundamentales por entender. Pero también puede acontecer que las técnicas usadas en la solución nos sirvan para resolver otros problemas, incluso más interesantes que el original, en cuyo caso el resultado acaba conocido como un método.

Los ejemplos 1 y 4 ilustran la primera de esas tres posibilidades, mientras que 2, 5 y quizás 6 caerían en diversos grados de la segunda. El 3, sin embargo, es un caso manifiesto de la tercera posibilidad.

Perseguí un enigma,
le ofrecí mi tiempo.
Inventé estrategias
que llevose el viento.

Formulé preguntas,
coseché el silencio.
Inicié mil cuentas
que jamás luz vieron.

Se esfumó mi esfuerzo
en tan vano empeño.
No obtuve la prueba
ni el gran contraejemplo:
lo que yo he buscado
se hallará muy lejos.

Feliz surge la idea que nos lleva,
por la senda ingeniosa,
que parece certera,
a la vera, muy cerca,
de ese ansiado teorema.

Pero la esquiva verdad no nos deja,
escondida en su templo,
ni desnuda probarla,
ni tampoco falsarla
con sutil contraejemplo.

Y aunque la mente mil tretas produce,
ofreciendo al diablo el clásico pacto.
Pasa el tiempo, la ambición se reduce,
y otra derrota cedemos de facto:
poseerla en cualquier traje típico,
de una hipótesis clara y razonable,
que permita un saludo al respetable
en forma de artículo científico.

A. C.

Un ejemplo notable: el análisis armónico y el método de Fourier

Fourier (1768-1830)

Entender las leyes que gobiernan la propagación del calor era un problema candente en los comienzos del siglo XIX, relevante tanto para la industria metalúrgica de entonces como para el afán humano de conocer la temperatura en el interior de la Tierra y la manera en que esta cambia con el tiempo y la profundidad. Joseph Fourier (1768-1830), que acompañó al ejército de Napoleón en la campaña de Egipto y quien, según sus biógrafos, era un gran friolero, contribuyó de manera decisiva a resolverlo, creando un modelo que es un hito en el uso de las matemáticas para dominar la naturaleza, pero que también dio lugar a un método con otras muchas aplicaciones que ha propiciado el desarrollo de varias teorías analíticas necesarias para ponerlo a punto y explotar sus consecuencias.

El modelo de Fourier parte de dos observaciones familiares en torno a la propagación del calor, que podían ser cuantificadas en los laboratorios disponibles en su tiempo, a saber:

- Conductividad: El calor fluye de las partes calientes a las frías, y la relación es de proporcionalidad inversa; si nos acercamos a la mitad de la distancia, recibiremos el doble de calor; si a un tercio, recibiremos el triple, y así sucesivamente. En el caso de una barra metálica uniforme, la constante de proporcionalidad es un número positivo, la conductividad térmica, que puede ser medida en el laboratorio.
- Calor específico: Es la cantidad de calor que necesita un gramo de una sustancia para elevar un grado su temperatura. En otros términos, el calor recibido es proporcional al aumento de temperatura experimentado, y esto es así dentro de ciertos límites que, en el caso del agua, suponen no bajar de 0º centígrados, o no subir de 100º, que es cuando

hay un cambio de fase y el fenómeno obedece a otras leyes más complicadas. Pero dentro de un rango adecuado de temperaturas, podemos calcular en el laboratorio ese calor específico, c_p , de cada sustancia.

Estas leyes eran conocidas por los contemporáneos de Fourier, pero él logró ir mucho más allá en el proceso de su modelización haciendo uso del lenguaje de las matemáticas. Consideró primero el caso sencillo de una barra metálica uniforme y térmicamente aislada, e introdujo la función temperatura $u(x,t)$, que depende de dos coordenadas, la variable espacial x, que indica la sección de la barra, y la variable temporal t. De manera que $u(x,t)$ nos dice la temperatura que tiene el punto (la sección x) en el momento t, y es una magnitud que podemos medir por medio de un sistema de termómetros convenientemente ubicados a lo largo de la barra. En su deducción Fourier consideró dos secciones distintas x, x'; y dos tiempos también distintos t, t'; y evaluó la cantidad de calor que la porción de la barra entre x y x' había recibido en el intervalo de tiempo entre t y t'. Ese cálculo puede hacerse de dos maneras diferentes, usando cada una de las dos leyes anteriores. Igualando los resultados obtenidos y con un poco de pericia en el uso del cálculo diferencial inventado por Newton y Leibniz, y desarrollado después eficientemente por los matemáticos de la Ilustración, Fourier obtuvo su famosa ecuación diferencial, también llamada ecuación del calor:

$$\rho c_p u_t - \alpha\, u_{xx} = 0, \quad \text{es decir} \quad u_t - \frac{1}{\kappa} u_{xx} = 0,$$

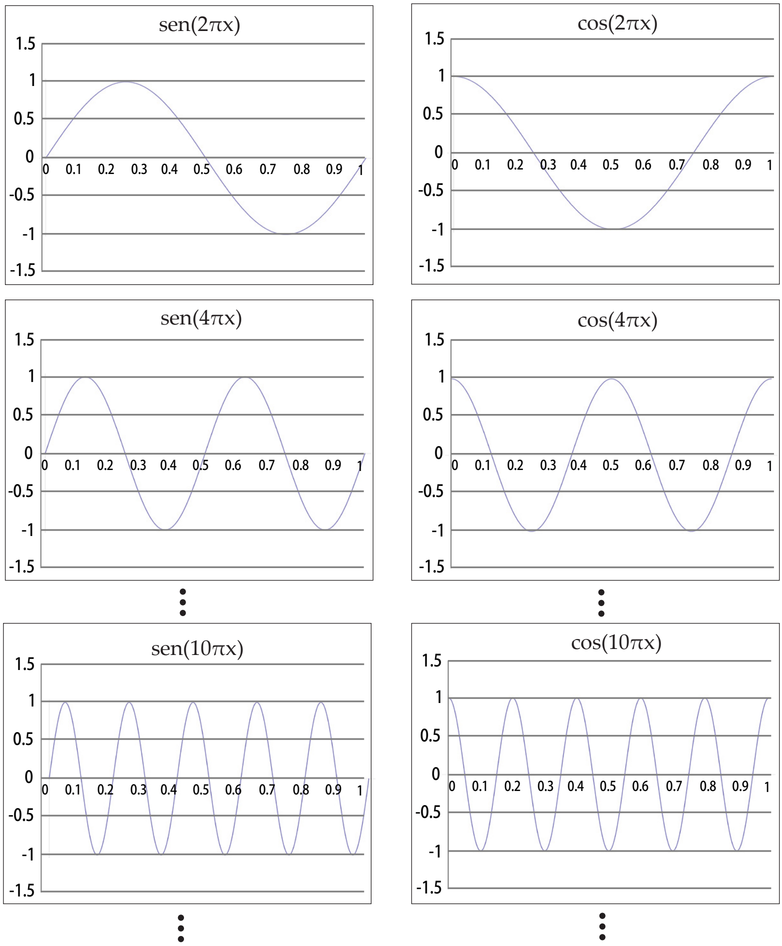
donde

$$\kappa = \frac{\rho c_p}{\alpha}, \quad \text{densidad} \quad \alpha = \text{conductividad y,} \quad c_p = \text{calor específico.}$$

Se trata de una ley (ecuación) diferencial que relaciona la derivada temporal de la temperatura (es decir su velocidad de cambio) con su derivada espacial de segundo orden (que es una cantidad relacionada con las propiedades de difusión del calor). Entre ellas aparece un coeficiente positivo que depende del calor específico, la conductividad y la densidad del metal que constituye la barra. El cálculo inventado por Leibniz y Newton en el siglo XVII es el instrumento adecuado para darle sentido a esta ley, aunque eso, sorprendentemente, todavía representa un obstáculo para muchos ciudadanos cultos, que pueden considerar la ecuación de Fourier como un arcano difícil de entender. Me parece, no obstante, que sí podrán maravillarse de que una expresión tan corta y precisa pueda describir y sirva para calcular algo tan complicado como es la evolución de la temperatura de un objeto real. Y de que a partir de ella podamos responder a preguntas nada triviales sobre nuestro planeta, o que nos ayude en empresas tan cotidianas como puede ser el diseño del sistema de calefacción de un edificio complejo.

Fourier escribió un primer artículo sobre este asunto que sometió a la Academia Francesa de Ciencias en 1807. El artículo fue analizado por Lagrange, Laplace y Legendre, quienes declinaron su publicación, pero animaron a Fourier a desarrollar sus ideas sugiriendo que el problema de la propagación del calor fuese el tema del Gran Premio de la Academia para el año 1812. Fourier lo ganó con una versión revisada de su trabajo, pero fue criticado por cierta falta de rigor en su método de resolver la ecuación, de manera que los académicos decidieron no publicar su artículo ganador en las *Memorias* de la Academia. No se trataba de una cuestión baladí; al contrario, precisar las ideas visionarias de Fourier se convirtió en un motor del desarrollo del análisis matemático, y todavía lo sigue siendo.

En realidad Fourier se basó en las técnicas que Daniel Bernoulli y Leonhard Euler habían introducido y discutido en torno a otra ecuación famosa de las matemáticas, la ecuación de las ondas y, en particular, aquella que describe la vibración de las cuerdas de un instrumento musical. Bernoulli y Euler echaron mano de las funciones trigonométricas que muchos siglos antes habían estudiado los matemáticos alejandrinos para analizar los movimientos celestes, cuyo estudio estaba sistematizado en el *Almagesto* de Claudio Ptolomeo, y cuyas gráficas ilustramos en las figuras siguientes:



Que estas funciones sirvan para representar los distintos armónicos de un sonido musical no debiera sorprendernos demasiado. Que también resulten útiles para entender la propagación del calor es algo mucho menos obvio, pero eso es lo que afirmaba Fourier: suponiendo que la temperatura inicial venga dada por una combinación de tales armónicos,

$$u(x,0) = a_0 + \left(a_1 \cos(2\pi x) + b_1 \operatorname{sen}(2\pi x)\right) + \cdots \\ + \left(a_n \cos(2\pi n x) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n x)\right),$$

entonces la evolución de esa temperatura está contenida en la fórmula

$$u(x,t) = a_0 + \left(a_1 \cos(2\pi x) + b_1 \operatorname{sen}(2\pi x)\right) e^{-4\pi^2 t/k} + \cdots \\ + \left(a_n \cos(2\pi n x) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n x)\right) e^{-4\pi^2 n^2 t/k} \ .$$

Surge naturalmente la pregunta: ¿podemos escribir toda función f (temperatura inicial) como una suma trigonométrica?

Fourier decía que sí se puede, y escribió unas fórmulas integrales para calcular los coeficientes a_n y b_n a partir de f. Pero eso es precisamente lo que no tenían tan claro los Lagrange, Laplace y Legendre, que criticaron con fundadas razones su manuscrito. En realidad se trata de un asunto muy delicado que ha sido contestado positivamente ya en el siglo XX, pero en cierto sentido que hay que precisar con un cuidado exquisito. No obstante, el método ha sido todo un éxito que se ha podido aplicar a la solución de muchos problemas que incluyen la propagación del sonido o de la luz, el tratamiento de señales, la fotografía digital, o los algoritmos que hacen funcionar máquinas como el TAC (Tomografía Axial Computarizada) tan útiles en los diagnósticos médicos. Incluso las razones por las que nuestras calculadoras de bolsillo nos permiten hacer multiplicaciones o divisiones largas están basadas en los desarrollos de Fourier; como también los usa, aunque a menudo sin saberlo, quien envía una fotografía hecha con un teléfono móvil a través de internet.

Un paso importante en el desarrollo del programa de Fourier lo dio Bernhard Riemann a mediados del siglo XIX, con su celebrada tesis doctoral presentada en la Universidad de Göttingen, a la que está dedicado nuestro último capítulo. En ella Riemann fue más allá del cálculo creado por Newton y Leibniz en el siglo XVIII, generalizando las nociones de *derivada* e *integral* para poderlas aplicar a un conjunto mayor de funciones. Pero también planteó cuestiones que dieron lugar a la teoría de los números transfinitos de Cantor, a los conjuntos fractales y a desarrollos de lógica-matemática que fueron importantes en el advenimiento de los modernos computadores.

El análisis armónico es una rama importante y activa de las matemáticas contemporáneas cuyos orígenes están precisamente en esta historia que hemos relatado.

Verde,
verde esmeralda,
azul turquesa,
azul ultramar,
índigo, violeta:
síntesis de luz.
Ondas, vibraciones, trigonometría.

Espirales, remolinos, puntos de fuga.
Venus de proporciones divinas.
Fuego que da la vida,
el calor y el color.
Amarillo, naranja,
rojo, carmín.

A.C.

Algunos resultados

A diferencia de lo que acontece con la física o la biomedicina, cuyos avances, descubrimientos y polémicas suelen aparecer con cierta frecuencia reflejados en los medios de comunicación, la actividad matemática pasa inadvertida. Salvo en casos muy puntuales, como ocurrió en 1994 con la demostración de A. Wiles del «último teorema de Fermat», o más recientemente con la solución de la conjetura de Poincaré obtenida por G. Perelman, cuyas declaraciones y vicisitudes personales fueron ampliamente comentadas en la prensa, en general el ciudadano desconoce los grandes progresos que han tenido lugar en las matemáticas. Al contrario, muchas personas tienen la impresión errónea de que en ellas todo está más que descubierto. Sin ánimo de alcanzar una enumeración exhaustiva, y con el único empeño de poner en evidencia los enormes progresos realizados durante las últimas décadas del siglo pasado y las primeras del presente, podemos señalar los resultados siguientes:

- La clasificación de los grupos finitos simples.
- La demostración de la conjetura de Mordell en teoría de números.
- Los trabajos de S. Yau sobre la conjetura de Calabi, con sus aplicaciones interesantes en geometría algebraica.
- Los resultados de W. Thurston, demostrando cómo emplear métodos de geometría hiperbólica para abordar cuestiones fundamentales de la topología en dimensiones pequeñas, enunciando la importante «conjetura de geometrización», que fue demostrada luego por G. Perelman en su afamado trabajo sobre la conjetura de Poincaré en dimensión tres.
- La demostración dada por P. Deligne de las conjeturas de A. Weil y la hipótesis de Riemann en cuerpos finitos.
- El descubrimiento de los atractores extraños y los solitones.
- La demostración de la conjetura de Poincaré en dimensión cuatro, obtenida por M. Freedman.
- El estudio de las ecuaciones de Yang-Mills por M. Atiyah y sus colaboradores. En especial el trabajo de S. Donaldson,

quien ha obtenido descripciones precisas de diversos espacios de dimensión cuatro que, unidos a los resultados de Freedman antes mencionados, han dado lugar al descubrimiento de que, entre todos los espacios euclídeos, es precisamente el de dimensión cuatro el único que admite estructuras diferenciables distintas y compatibles con su topología habitual.

- El éxito extraordinario del análisis armónico con los operadores pseudodiferenciales e integrales de Fourier, que han dado lugar a una teoría bastante completa de las ecuaciones en derivadas parciales lineales. En particular los resultados de C. Fefferman en análisis microlocal a propósito del principio de incertidumbre de Heisenberg y sus aplicaciones a la mecánica estadística cuántica: estabilidad de la materia y desarrollo asintótico de las energías atómicas.
- Dentro del análisis también cabe reseñar la demostración de la conjetura de Bieberbach obtenida por L. de Branges. Los resultados de Makarov, estableciendo una vieja conjetura acerca del verdadero orden de Hausdorff de la medida armónica. El problema de la acotación de la integral de Cauchy para curvas lipschitzianas, resuelto por Alberto Calderón y, finalmente, la teoría de integrales singulares asociadas a núcleos singulares en subvariedades del espacio euclídeo que ha sido desarrollada por E. Stein y S. Wainger.
- En el importante mundo no lineal podemos señalar los trabajos de L. Caffarelli, quien ha extendido las ideas de Di Giorgi estableciendo una teoría bastante completa para tratar los problemas de frontera libre.
- Los resultados de Szemerédi demostrando la existencia de progresiones aritméticas de longitud arbitraria en sucesiones de enteros de densidad positiva.
- La demostración del teorema de los cuatro colores, obtenida por Appel y Haken en el año 1976, y la más reciente prueba de Hales (1998) de la conjetura de Kepler sobre el empaquetamiento de las esferas en el espacio tridimensional. Ambas pruebas ofrecen la novedad de estar en parte basadas en

cálculos realizados con el ordenador y, por tanto, introducen un elemento de reflexión en matemáticas acerca de lo que significa el concepto de demostración.

- La demostración del «último teorema de Fermat», culminada por Andrew Wiles en 1994 y su continuación en la prueba de la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil.

La descripción de cualquiera de estos interesantes resultados se saldría con creces de los propósitos de este ensayo, que pretende estar dirigido a lectores aficionados que no son matemáticos profesionales. Pero su mera enumeración puede resultar ilustrativa de la rica actividad investigadora realizada en las matemáticas.

Sin embargo, han sido tantas las alusiones al fermat en los capítulos anteriores, que me parece que el último resultado se merece algún comentario adicional por mi parte. Siendo uno de los problemas míticos de las matemáticas, me era conocido desde mis tiempos de estudiante de bachillerato, aunque luego mis intereses me llevaron por otros derroteros y nunca pertenecí al «club del fermat», formado por aquellos, como es el caso de Wiles, que lo tuvieron por principal objeto del deseo. No obstante, recuerdo la gran excitación mediática que produjo el anuncio de su demostración, que hizo Wiles en una conferencia dada en el Instituto Newton en el mes de junio de 1993. Luego se descubrió una laguna en la prueba que pudo subsanar después, tras un duro año de trabajo. Para celebrarlo, el Departamento de Matemáticas de Princeton, donde yo me encontraba entonces como profesor visitante, organizó un banquete en la que tuve el privilegio de compartir mesa con el homenajeado, y del que todavía conservo la tarjeta del menú firmada por Andrew.

La aritmética modular ha sido un tema recurrente en varios de estos ensayos, por lo que quizás sea conveniente subrayar su presencia en esta famosa demostración. Podemos empezar invocando a Carl Friedrich Gauss, cuya ley de reciprocidad cuadrática, probablemente su teorema favorito, es uno de los resultados aritméticos más sorprendentes y profundos. Dice así: «Dado un número primo p, el número de raíces cuadradas de un entero n en la aritmética módulo p depende solamente del resto de la división de p por $4n$».

Consideremos la ecuación $x^2 = 5$ módulo 953. Resulta que 953 es primo y al dividirlos por 20 = 4 × 5 da 13 como resto, por lo que siguiendo la ley de Gauss, el número de raíces cuadradas de 5 módulo 953 es igual al de raíces de 5 módulo 13. Ahora bien, la aritmética módulo 13 sólo consta de 13 números, cuyos cuadrados son 0, 1, 3, 4, 9, 10 y 12 módulo 13, como puede ser comprobado fácilmente; y como 5 no está entre ellos, podemos concluir que nuestra ecuación carece de soluciones. Sin embargo, hacer la cuenta directamente en el módulo 953 hubiese necesitado de un enorme cálculo que nos hemos ahorrado gracias a Gauss.

La ley de reciprocidad suele escribirse por medio de la fórmula

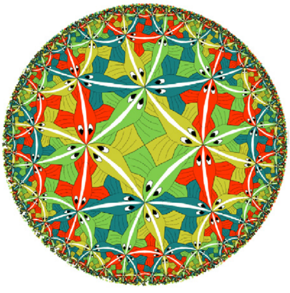
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \quad ,$$

donde p y q son primos impares y el símbolo de Legendre $\left(\frac{n}{m}\right)$ vale 0 si m es un divisor de n; en caso contrario toma el valor +1 si la ecuación $x^2 \equiv n \bmod (m)$ tiene solución, y el valor -1 si carece de ellas.

Es natural preguntarse si la ley de reciprocidad cuadrática pudiera extenderse para tratar otras ecuaciones más complicadas. En ese empeño, Emil Artin obtuvo una ley más general que podía aplicarse a otras ecuaciones de una variable en las que se satisfacía una cierta propiedad (que un objeto llamado grupo de Galois fuese abeliano). En torno al año 1954 Martin Eichler encontró, sorprendentemente, una ley de reciprocidad que iba mucho más allá que la conocida por Artin. En particular esa ley podía aplicarse a la ecuación de dos variables $x^3 - x^2 = y^2 + y$, permitiéndonos calcular fácilmente el número de sus soluciones módulo un primo p. Algún tiempo después los matemáticos japoneses Yutaka Taniyama y Goro Shimura propusieron una extensión de la ley de Eichler que podía ser aplicada a todas las ecuaciones cúbicas de dos variables x e y.

Esta propuesta resultó decisiva, por cuanto Gerhard Frey, Jean-Pierre Serre y Kenneth Ribet se dieron cuenta de que la ley de reciprocidad no abeliana de Taniyama-Shimura implicaba el «último teorema de Fermat», y ahí, precisamente, es donde se enmarca el trabajo de Andrew Wiles.

Un corolario notable de estas nuevas leyes de reciprocidad no abelianas es que el número de soluciones de la ecuación de Fermat puede ser obtenido a partir de las simetrías de un espacio geométrico muy notable, llamado «plano hiperbólico» o, también «disco de Poincaré», que ha sido motivo de numerosos grabados de M. Escher.



Escher, *Límite circular III*

Escher, *Límite circular IV (Cielo e infierno)*

El plano hiperbólico puede ser visualizado como un círculo (sin la circunferencia frontera) provisto de una peculiar noción de distancia: cerca del centro la distancia entre dos puntos es similar a la usual (euclídea), pero esta se distorsiona a medida que nos acercamos a la frontera, como ilustran los grabados de Escher, en la que todas sus figuras tienen idéntica longitud hiperbólica.

Robert Langlands, un matemático canadiense que es profesor en Princeton, tuvo la intuición, a mediados de los años 70 del pasado siglo, de que los resultados de Eichler, Taniyama y Shimura formaban parte de una teoría mucho más general que pretende ser una «gran unificación» de diversas áreas matemáticas y que es ahora conocida como la «filosofía de Langlands». En un cierto y preciso sentido, Langlands ha enunciado la «gran ley de la reciprocidad», que puede aplicarse a cualquier número de ecuaciones polinómicas de grado arbitrario y con cualquier número de variables.

Los resultados de A. Wiles con el fermat han dado lugar a diversos avances en el programa de Langlands, pero este todavía mantendrá ocupados durante bastante tiempo a una buena parte de los matemáticos.

5.
Felipe II, el diablo y las matemáticas

Dichoso es el curso de la culebra, retorciéndose de una parte a otra con tal incertidumbre, que aun su mismo cuerpo no sabe por dónde le ha de llevar la cabeza.

Así también lo hacía el rey Felipe II, encubriendo sus fines a sus embajadores, y señalándoles otros, cuando convenía que los creyesen y persuadiesen a los demás.

Diego de Saavedra Fajardo

Felipe II fue paladín de la causa católica, pero también demonio del mediodía para muchos de sus súbditos holandeses. Como rey de España, que era la gran potencia del siglo XVI, ejerció un poder inmenso. Ahora, en estos comienzos del siglo XXI, se han celebrado exposiciones tanto del reinado de su padre, el emperador Carlos V, como del suyo propio, y se han realizado estudios y publicado diversos ensayos y monografías en torno a ambas figuras históricas.

Felipe II (1556-1598)

Hay un episodio del reinado de Felipe II que no ha sido suficientemente resaltado y que, sin embargo, ilustra de manera fehaciente sobre las limitaciones de su manera de gobernar. Seguramente el gran rey contaba entre sus asesores con avezados políticos, militares, hombres de iglesia, incluso artistas, y también, cómo no, se vería rodeado de intrigantes de la más diversa laya. Pero no parece que entre ellos hubiera nadie que estuviese al tanto de los avances científicos de su tiempo, por lo que llegó a dejarse embaucar por aventureros que le prometieron transmutar diversos metales en el oro que tanto necesitaba para financiar sus ejércitos.

Antes de entrar de lleno en la descripción de ese episodio, conviene que presentemos a otro de sus protagonistas. Se trata de François Viète (1540-1603), o Franciscus Vieta si nos atenemos a la versión latina, un hombre de leyes que ejerció un cargo de cierta relevancia en el Tribunal de Apelaciones de París durante el reinado de Carlos IX, siendo luego asesor real durante los turbulentos años de los reinados de Enrique III y de Enrique de Navarra (Enrique IV). Sin embargo, Vieta debe su notoriedad a las matemáticas, ya que está considerado el padre del álgebra, por ser el primer autor que introdujo el cálculo simbólico, operando indistintamente con letras y con números, en sus esfuerzos por sistematizar el estudio de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, cuyas soluciones habían sido obtenidas por los italianos Del Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari. Vieta estudiaba matemáticas por afición, en sus ratos libres, exactamente igual que haría su paisano Pierre de Fermat, también con notable éxito, medio siglo más tarde.

Franciscus Vieta (1540-1603)

Durante la guerra franco-española de 1589-90, Vieta descifró para Enrique de Navarra varias cartas del rey Felipe II, codificadas en un «complicado» sistema homófono que usaba dos símbolos distintos para las consonantes y tres para las vocales. Además de otros específicos para términos habituales, tales como: España *(leu)*, Francia *(pe)*, armada *(om)*, capitán *(ne)*, Génova *(tura)*, o Cataluña *(ti)*. Las cartas estaban dirigidas al duque de Alba, a don Juan de Austria y a otros personajes importantes. Contenían información muy valiosa, por lo que al caer en manos de Enrique IV, del papa, o de sir Francis Walsingham, poderoso ministro de la reina de Inglaterra, contribuyeron grandemente a desbaratar los planes de su cristianísima majestad.

Cuando Felipe II supo que había sido descubierto el sistema de codificación que su corte creía segurísimo, se dirigió al papa acusando a los franceses de haber utilizado magia negra y de tener algún pacto con el diablo, pues de otra forma no podría explicarse el asunto. Pero el papa, que también era un rival de la Corona española, tenía a su propio especialista en descifrar mensajes, Giovanni Battista Argenti, quien conocía la existencia y las habilidades de Vieta, por lo que se ocupó en dar publicidad a las ridículas conjeturas de Felipe II, provocando la hilaridad entre sus numerosos enemigos europeos.

Huelga decir que este asunto tiene bastante más miga. Podríamos añadir otros nombres, así como precisar fechas y detalles. Sin ir más lejos, mientras escribo estas líneas, tengo a la vista cientos de fotocopias del Archivo General de Simancas que contienen los diferentes métodos de cifrado usados durante el reinado de Felipe II. Letras, números y símbolos ingeniosos, pero con un sistema de sustitución que no era difícil de desvelar para los expertos del siglo XVI. Resulta un poco patético observar ahora cómo el hombre más poderoso de la Tierra, en cuyo reino no se ponía el sol, señor de grandes ejércitos y campeón de la Contrarreforma, que planeó operaciones tan complicadas como la invasión de Inglaterra, no contaba entre sus asesores, políticos, militares y hombres de iglesia con alguien dotado de los conocimientos necesarios para asegurar el secreto de su correspondencia.

Los códigos secretos

> *Si tenía que decir algo confidencial, lo escribía usando el cifrado, esto es, cambiando el orden de las letras del alfabeto, para que ni una palabra pudiera entenderse. Si alguien quiere decodificarlo, y entender su significado, debe sustituir la cuarta letra del alfabeto, es decir, la d por la a, y así con las demás.*
>
> Suetonio, *Vida de los Césares*.

Esta anécdota del reinado de Felipe II la encontramos narrada en muchos libros de criptografía, donde también se recogen otras historias no menos jugosas, como la que atañe a María Estuardo, reina de Escocia, cuya correspondencia fue interceptada y descifrada por el ministro Walsingham, hecho que resultó crucial en el desarrollo del juicio en el que fue condenada a muerte por el tribunal de la reina Isabel I de Inglaterra. Pero el nacimiento de las claves secretas se remonta a los tiempos de Julio César, como demuestra la cita de Suetonio. Los códigos de sustitución son versiones más o menos sofisticadas del sencillo método del emperador, consistente en efectuar una permutación de las letras del alfabeto. En este caso se trata de la permutación siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

donde la letra de la primera fila se transforma en la que tiene debajo en la segunda. Con este sistema, el mensaje *EN UN LUGAR DE LA MANCHA* se cifra como *HP XP ÑXJDU GH ÑD ODPFLD.*

Si hacemos caso a Suetonio, parece ser que Julio César usaba solo permutaciones cíclicas, muy sencillas. Pero si considerásemos todas las permutaciones posibles de las veintisiete letras (dejando aparte las comas, los puntos y demás signos ortográficos), resulta un número imponente: 27!=1×2×3×4×…×27, mayor que diez quintillones. Eligiendo una entre esa cantidad enorme de posibilidades para nuestro cifrado, puede parecer, a primera vista, que es muy poco probable que alguien se entere de lo escrito sin tener información privilegiada acerca de la permutación de partida. Ahora bien, ese no es el caso, y la razón del fallo estriba en la distinta frecuencia con la que las letras del alfabeto aparecen en los escritos. En castellano la letra de mayor frecuencia es la *E*, que alcanza un 13,68%; luego tenemos la *A*, con un 12,53%; después viene la *O*: 8,68%; siguen la *S:* 7,98%, la *R:* 6,87%, la *N:* 6,71%, la *I:* 6,25%, etc.

En el siglo de Felipe II los expertos ya eran conscientes de esta debilidad del sistema de Julio César, por lo que se aplicaron a hacerlo más seguro. Entre ellos, Blaise de Vigenère (1523-1596) ideó un método (*le chiffre indéchiffrable*) que parecía ofrecer esa seguridad y que puede ser descrito fácilmente a partir de una tabla con las veintisiete permutaciones cíclicas de las letras del alfabeto:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
………																										
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Una vez en posesión de la tabla, necesitamos una palabra clave, y secreta excepto para emisor y receptor del mensaje, cuya longitud será también importante en aras de la seguridad del sistema. Supongamos que nuestra clave es *BECA* y que deseamos cifrar el *Quijote: EN UN LUGAR DE L…* El método de Vigenère para cifrar la primera letra del mensaje, *E,* consiste en utilizar la permutación que empieza por la primera de la clave; como quiera que esta es *B,* tenemos que usar la segunda permutación, que cifra la *E* en *F.* Para


B. de Vigenère (1523-1596)

la segunda letra, *N*, tenemos que fijarnos en la permutación que comienza por la segunda letra de la clave, *E*, según la cual la letra *N* se codifica como *Q*. Y así sucesivamente, de manera que, por ejemplo, el *Quijote* cifrado empezaría así: *FQ WN MYIAS HG L…*

Aunque en apariencia se trata de un código muy complicado, sus matemáticas, sin embargo, son sencillas y están basadas en la modularidad:

- Como hay veintisiete letras, la aritmética apropiada es la módulo 27. Podemos equiparar letras con restos, por ejemplo: A = 0, B = 1, C = 2,…, Z = 26. Cada mensaje M resulta ser entonces una sucesión de números M_0, M_1, M_2…, en donde cada M_j está entre 0 y 26.
- El mensaje cifrado C será otra sucesión de tales números (que podremos convertir en letras con la identificación anterior): C_0, C_1, C_2, C_3,…
- La clave K da lugar a otra sucesión de números entre 0 y 26 (K_0, K_1, K_2, K_3…), donde K_0 es el número que corresponde a la primera letra de la clave, K_1 a la segunda, y así sucesivamente, hasta que llegamos a la última; entonces volvemos a comenzar por la primera otra vez y continuamos. La sucesión obtenida (K_j) será pues periódica, con un período igual al número de letras de la clave.

El algoritmo de cifrado y descifrado resulta ser muy sencillo:

cifrado: $C_j = M_j + K_j$ módulo 27;

descifrado: $M_j = C_j - K_j$ módulo 27.

Pero aunque ahora no baste con un análisis sencillo de frecuencias para descodificar la cifra de Vigenère, sin embargo no es difícil idear estrategias basadas en la repetición de algunos bloques de letras y en los intervalos en los que estos aparecen, para acabar descubriendo la longitud y la naturaleza de la clave. Y eso lo sabían hacer Vieta y sus expertos colegas de aquel siglo, sin necesidad de pactos diabólicos de ninguna clase y sin el uso de las modernas calculadoras que simplificarían notablemente el proceso.

En 1590, Enrique de Navarra hizo pública una carta codificada de un miembro del Gobierno español dirigida a Felipe II, donde se detallaba una trama para desplazar a Enrique de su trono, quizás asesinándolo. El padre Feijoo cuenta así lo sucedido:

> Habiéndose interceptado en Francia, cuando ardían las guerras de la Liga, algunas cartas de España, escritas con caracteres voluntarios, en que se añadía la precaución de varios diferentes alfabetos dentro de una misma carta, lo que parecía hacer absolutamente imposible descifrarlas a quien no tuviese la clave. [...] Muchos juzgaron la hazaña, y no sin alguna verosimilitud, superior a toda humana industria, por lo que los españoles elevaron quejas a Roma de que los franceses usaban artes diabólicas para penetrar sus secretos. Pero la verdad era que no había intervenido en este negocio más diablo que un espíritu de rara comprensión y sutileza, ayudado de una aplicación infatigable; pues se cuenta de este raro hombre que algunas veces sucedió estarse tres días con sus noches embelesado en sus especulaciones matemáticas, sin comer ni dormir, salvo un brevísimo reposo que tomaba, reclinándose sobre el brazo de la silla.

Un giro muy importante en la evolución de la criptografía tuvo lugar en torno al año 1918, cuando el ingeniero alemán Arthur Scherbius creó la máquina de cifrar Enigma, que fue utilizada por el ejército alemán durante la Segunda Guerra Mundial. Dotada de un sistema de rodillos, portador cada uno de una permutación distinta del alfabeto, forzados a rotar después de cada pulsación,


Máquina Enigma

y de un clavijero que establecía una permutación adicional que era cambiada cada día, Enigma resultaba invulnerable a los análisis de frecuencia, debido a la cantidad inmensa de permutaciones involucradas, que iban cambiándose con cada símbolo escrito. No obstante el ejército polaco reunió a un grupo de matemáticos, entre los que destacaba Marian Rejewski, que fue capaz de encontrar algunos puntos débiles de Enigma y leer sus mensajes unos años antes de la invasión nazi de Polonia. Al comienzo de la guerra, los trabajos de este grupo fueron comunicados al servicio secreto británico, que creó una unidad que, dirigida por Alan Turing y ubicada en Bletchey Park, logró descifrar las versiones más sofisticadas de Enigma mediante ingeniosas estrategias matemáticas y potentes métodos de cálculo en un ordenador, Colossus, también llamado «la Bomba», construido para llevarlos a cabo. Este episodio marcó un punto de inflexión en el estilo de la criptografía y en sus personajes: de un oficio de diletantes versados en lenguas, pasó a ser una disciplina de las matemáticas que hace uso de métodos sofisticados de álgebra, teoría de los números, combinatoria, probabilidad y, por supuesto, de poderosas máquinas calculadoras.

En las versiones más complejas de Enigma, que fueron las usadas por los submarinos alemanes, su aspecto externo era el de una máquina de escribir dotada de un teclado, pero también de un clavijero que permitía establecer una permutación entre algunas letras (en torno a diez), que debía cambiarse cada día. Dentro de la caja se hallaban los cuatro o cinco rotores (según el modelo), que daban lugar a permutaciones diferentes del alfabeto que eran alteradas con cada pulsación del teclado. Cada rotor disponía de un giro, independiente de los demás, estando conectados todos en línea dentro de un circuito que se abría al pulsar la letra, y cuya señal eléctrica atravesaba el clavijero y los rotores, uno detrás de otro. Al final, un mecanismo eléctrico de carácter especular hacía retornar la señal recorriendo en sentido inverso el circuito y dando lugar a una letra de salida, que era la versión cifrada de la que se pulsó al iniciar el proceso. El sistema era involutivo, por lo que para descodificar el mensaje cifrado bastaba con teclearlo en Enigma y leer el resultado. Entender las matemáticas y los algoritmos involucrados fue el gran éxito de los descodificadores, quienes también detectaron que una gran debilidad del método radica en las instrucciones necesarias para ponerlo en funcionamiento, es decir: cuál es la permutación del clavijero y cuáles son las posiciones iniciales de los rotores. El ejército nazi tuvo que imprimir unos libros, con grandes precauciones y con tintas que podían destruirse fácilmente, pero donde se hallaban escritos esos datos, por lo que conseguir uno de esos libros fue crucial para el éxito del equipo de Turing, siendo las circunstancias de su logro y las peripecias a las que dio lugar motivo de diversos relatos, películas y leyendas de la Segunda Guerra Mundial.

El arte de cifrar cambió radicalmente cuando a finales de los años setenta del pasado siglo se inventaron los sistemas de clave pública, en los que el cifrado puede ser realizado por cualquiera, mientras que el descifrado solo puede llevarlo a cabo quien posea una información privilegiada.

El fundamento de estos sistemas radica en la existencia de unas «funciones trampa». Es decir, funciones f tales que sea fácil calcular $f(x)$, pero muy difícil, prácticamente imposible si no se está en el secreto, calcular la inversa $f^{-1}(y)$. Un ejemplo notable es el llamado sistema RSA, por las iniciales de sus creadores Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, que está basado en la función multiplicación: $(p,q) \to n=pq$, aplicada a pares de números primos p y q. En este caso, calcular la función inversa es el famoso problema de la factorización, y se estima que el ordenador más potente del momento tardaría miles de años en factorizar un entero típico de trescientas cifras. En el método RSA resulta crucial un teorema de Fermat-Euler de la aritmética modular, cuya demostración es conocida desde hace unos tres siglos y se estudiaba en los programas del bachillerato de mi época, pero el sistema RSA también necesita del uso sistemático de los modernos ordenadores y se encuentra en la base de la seguridad de las comunicaciones, desde las de los ejércitos hasta internet.

Las dos culturas Ravelstein

En la última novela del premio Nobel Saul Bellow, el personaje Ravelstein sostiene que «entre los científicos son escasos los ejemplos de grandes personalidades. Filósofos, pintores, estadistas, abogados, de gran categoría sí los había. Pero grandes espíritus, hombres o mujeres, en el campo de la ciencia son extremadamente raros». «Lo grande es su ciencia, no las personas», apostilla Chick, trasunto del autor, que en la novela refiere los pormenores de su vida matrimonial con Vela, una física del caos de la que se había divorciado recientemente. Casi como el propio Bellow, que lo hizo de una especialista en análisis matemático.

No es el único caso de espléndido narrador que ve en los científicos a seres un tanto anodinos, pero tampoco va a ser mi intención combatir esa imagen con otra de características más favorables. Por el contrario, conozco suficientes ejemplos para creer que entre los científicos, como en todo colectivo amplio, se dan los cultos y los ignorantes fuera de su área específica, los divertidos y los aburridos, los sagaces, los estúpidos y los mediopensionistas, en proporciones arbitrarias y, con frecuencia, bastante sorprendentes. Además, en un país tan invertebrado científicamente como España, no son siempre los más brillantes en sus campos quienes son escuchados por la feliz gobernación, en las pocas ocasiones en las que esa situación se presenta. Incluso en un mundo tan austero como es el de la ciencia, puede aplicarse el comentario de Francis Bacon de que «la fama es como un río que lleva a la superficie los cuerpos ligeros e hinchados y sumerge a los pesados y sólidos».

Bellow fue profesor de Literatura en las universidades de Princeton y de Chicago, que son dos de las instituciones favoritas de todo matemático. El primero es un pequeño pueblo del estado de New Jersey, situado a una hora escasa de New York y conocido por su universidad y por el *Institute for Advanced Study (IAS),* que es el lugar donde ejercieron Albert Einstein, Kurt Gödel y John von Neumann quien, entre otras muchas razones, es famoso por haber diseñado y construido el *ENIAC*, que puede ser considerado como el primer ordenador moderno. Es también uno de los creadores de la teoría de juegos aplicada a la guerra y a los modelos económicos.

Cuando yo era allí un joven profesor, don Vicente Llorens estaba a punto de jubilarse de su cátedra en el Departamento de Literatura Española. Tuve, no obstante, la oportunidad de tratarlo y de participar en algunas tertulias que se organizaban en el club de profesores en torno a su persona. Recuerdo aún sus palabras en la reunión que se congregó en mi casa, espontáneamente, aquel día de otoño del 75 y que expresaban su emoción por haber sobrevivido al principal causante de tanta desgracia. En Princeton fue también profesor don Américo Castro, aunque eso ocurrió mucho antes de mi llegada, pero me parece interesante señalar que en esa famosa universidad americana enseñaran dos intelectuales españoles exiliados de la talla de don Américo y don Vicente. No obstante, con todo mi afecto y mi respeto por dos figuras tan señeras de nuestra cultura, creo que sería una muestra de sórdido narcisismo pensar que los hispanistas son una parte muy importante de la grandeza intelectual de aquel sitio. Princeton es uno de los pocos lugares del mundo en el que los matemáticos, y los físicos, representan el canon intelectual, y eso se nota hasta en el callejero, la arquitectura, y la influencia ejercida en el complejo económico, político y de seguridad de los Estados Unidos.

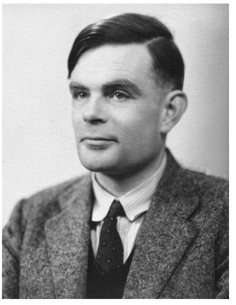
Durante el año 1976, el director del *IAS* quiso «fichar» a un sociólogo que era catedrático de una prestigiosa universidad americana. Los matemáticos del Instituto, capitaneados por André Weil, se opusieron rotundamente y protagonizaron un agrio debate público. En retrospectiva, podríamos achacarles, seguramente con cierta justicia, haber tenido un interés corporativo, por cuanto ese fichaje implicaba el aumento de las escuelas del *IAS,* con la consiguiente pérdida de poder específico para el grupo de físicos y matemáticos. En cualquier caso, al final se impuso la opinión del director. Pero las armas intelectuales que se esgrimieron fueron poderosas y el análisis de los trabajos del eminente sociólogo, a la luz de los criterios de los matemáticos, resultó demoledor: libros pletóricos de lugares comunes, afirmaciones sin demostrar o con demostraciones falsas, y páginas y páginas que podían ser resumidas en una simple frase. Constituyó una exhibición de lo peligroso que resulta usar el criterio de una disciplina tan austera como son las matemáticas para juzgar a las demás. Claro que en la vida diaria tenemos a menudo suficientes muestras de valoraciones que propugnan todo lo contrario. Este episodio del *IAS* inspiró a Alan Sokal (quien era por entonces un estudiante de doctorado en el Departamento de Física de la Universidad de Princeton) y a J. Bricmont la escritura, algunos años después, de su celebrado *Imposturas intelectuales*, que en España fue publicado por Ediciones Paidós Ibérica en 1999. Por cierto, el mencionado André Weil, fallecido a finales del pasado siglo, fue uno de los matemáticos más brillantes de su tiempo, pero en España es más conocida su hermana, Simone Weil, cuya pintoresca y apasionada vida de monja progresista aparece con cierta frecuencia comentada en la prensa por nuestros intelectuales más conspicuos.

En la primavera de 1989, el entonces embajador de España en los Estados Unidos vino desde Washington a Princeton para condecorar al ilustre hispanista John H. Elliott con la Gran Cruz de Alfonso X el Sabio. Entre los asistentes al acto nos encontrábamos los miembros españoles del *IAS,* pero también estaban algunos distinguidos matemáticos del lugar que habían tenido, y seguían teniendo, una prolongada relación científica con España a través de alumnos, colaboradores y múltiples publicaciones conjuntas. Pues bien, tras mi conversación con el embajador me quedó claro que en nuestra Embajada se desconocía la existencia de esos lazos estrechos de colaboración con científicos relevantes, y que tampoco tenían demasiado interés en conocerlos. No se trata, entiéndase bien, de cuestionar la justicia, o la oportunidad, de la condecoración otorgada a Elliott, autor de una espléndida obra y que une a su indudable categoría de historiador una gran simpatía personal, que podemos muy bien certificar quienes hemos disfrutado de su hospitalidad. Lo que quisiera subrayar es que nuestra diplomacia, y en general nuestra feliz gobernación, mira casi siempre en una única dirección. Como es natural, tengo una idea muy somera de las tareas que lleva a cabo nuestro servicio exterior. Pero entiendo que una de ellas será la de establecer contactos y tender puentes hacia personalidades relevantes y de prestigio que ejercen, por lo tanto, una influencia natural en la vida de su país. ¿Ha considerado alguna vez nuestra diplomacia las posibilidades que se podrían abrir a través de los contactos entre científicos?

Ciencia, violencia y política

Los logros del equipo de Alan Turing fueron un factor decisivo para la victoria aliada, y así lo afirmó el mismo Winston Churchill. En el mejor de los escenarios, la guerra se hubiera prolongado algunos años más de no haber podido leerse los mensajes cifrados de Enigma. Fue también necesario hacer creer al alto mando alemán que su sistema de codificación seguía siendo invulnerable, lo que dio lugar a algunas decisiones muy dramáticas, que han sido llevadas al cine y a la literatura, por cuanto evitar el bombardeo anunciado de una ciudad podía dar pistas a los alemanes de la fragilidad de Enigma.

Después de la guerra, las proezas de Turing se mantuvieron en secreto. De hecho, Inglaterra había capturado miles de máquinas Enigma que luego distribuyó entre sus antiguas colonias, cuyos gobiernos creían que eran tan seguras como les habían parecido a los alemanes. De esta manera los ingleses descifraron las comunicaciones secretas de esos países durante muchos años.


Alan Turing (1912-1954)

En cuanto a Turing, en vez de ser aclamado como un héroe, fue perseguido por su homosexualidad, siendo sometido a una especie de castración química como alternativa a un proceso penal escandaloso. Sufrió una gran depresión que le llevó a suicidarse en 1954 ingiriendo una manzana envenenada con cianuro, cuando solo contaba cuarenta y dos años de edad. Antes, no obstante, había desarrollado la importante noción de *máquina universal* de Turing, y junto a A. Church, de la Universidad de Princeton, está considerado como el fundador de la moderna teoría de la computabilidad, y es uno de los grandes lógico-matemáticos del siglo pasado. En el año 2012 se cumplió el centenario de su nacimiento, y se celebraron un buen número de actividades y congresos en su honor. También el Gobierno británico ha accedido ahora, tras algunos intentos fallidos en el pasado, a reivindicar la memoria de Turing pidiendo públicamente perdón por aquel proceso brutal al que fue sometido.

Paul Painlevé, dos veces presidente de Francia durante la Tercera República, y Éamon de Valera, presidente de Irlanda, están entre los matemáticos que han desempeñado altos cargos políticos. Un caso especial es el de Jean van Heijenoort, lógico-matemático francés que fue secretario personal de Trotski, a quien acompañó durante su exilio, primero en Europa y luego en México. La Segunda Guerra Mundial dio lugar, claro está, a muchas otras interacciones con la política. La mayoría de los grandes matemáticos tuvo un comportamiento digno, como fueron los casos de David Hilbert, Heinz Hopf, Oskar Perron, Ernest Zermelo o Tullio Levi-Civita; o fueron víctimas de la barbarie, como Józef Marcinkiewicz, Felix Hausdorff, Juliusz Schauder, o Stanislaw Saks; o tuvieron que exiliarse, como Emil Artin, Stefan Bergman, Edmund Landau, Richard Courant y tantos otros. Los hubo también en el lado oscuro: ejemplos conocidos de matemáticos nazis, que ejercieron un liderazgo en el mundo matemático alemán de aquellos años, fueron Ludwig Bieberbach, Wilhelm Blaschke y Oswald Teichmüller, quienes escribieron en torno a las cualidades que tenía la «matemática aria», de la que predicaban un estilo intuitivo y geométrico en contraposición a la judía, más lógica y analítica, según decían. Se trata, no obstante, de un asunto demasiado dramático que aún no ha sido suficientemente analizado.

Pero rebajando un tanto la intensidad de la maldad humana, la historia reciente de las matemáticas contiene numerosas anécdotas que ilustran esas interacciones con la política. Entre mis favoritas se encuentra la que podríamos titular «Yo soy un brahmán», que tiene como protagonista a Subrahmanyan Chandrasekhar: el *tempo* es el año 1937 y el *locus* es la Universidad de Chicago donde fue profesor desde esa fecha. Chandrasekhar (1910-1995) recibió el premio Nobel de Física en el año 1983 por su teoría sobre el colapso gravitacional de las estrellas y el llamado límite de

Chandrasekhar, que describe la masa máxima que puede tener una enana blanca o, de manera equivalente, la masa mínima que necesita poseer una estrella para su colapso en forma de agujero negro. Durante mis estudios de doctorado en la Universidad de Chicago, a principios de los 70, tuve el privilegio de asistir a un curso de Chandra sobre la relatividad general. La anécdota que oí relatar es más o menos la siguiente: cuando el joven Chandra se incorporó al Departamento de Física, el *chairman* del Departamento de Matemáticas era Gilbert Ames Bliss, un especialista en cálculo de variaciones que tenía reputación de racista. En la sala común, compartida por ambos departamentos, los físicos presentaron el nuevo profesor al *chairman* Bliss, quien se giró rehusando darle la mano e hizo un comentario xenófobo, generando el bochorno y la estupefacción de los allí presentes. Todos se esforzaron en presentarle excusas a Chandra, criticando a Bliss y asegurándole de que ese no era, ni mucho menos, el talante de los demás. Pero Chandrasekhar sonrió y les dijo que no había ningún problema, que él era un brahmán y que los brahmanes no tienen por costumbre darle la mano a nadie. Creo que esa expresión, «Yo soy un brahmán», puede resultar útil cuando, en el mundo restringido de la ciencia en el que los egos también andan a veces demasiado revueltos, nos podamos sentir ninguneados.

En coordenadas locales

A principios de los 80 del pasado siglo, el rector de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM) era un arabista que había tenido algunos contactos con el régimen de Gadafi, de quien recuerdo que se hizo alguna propaganda en el campus. Pero aquel rector decidió dimitir dando lugar a un proceso de sucesión en el que hubo al comienzo dos candidatos: un vicerrector que era economista, y el decano de la Facultad de Derecho, con quienes había tenido yo alguna relación por haber coincidido en varias comisiones. Creo, en retrospectiva, que ambos defendían programas muy parecidos que yo, en general, compartía. Alrededor de cada candidatura se agruparon equipos también muy similares quienes, quizás exagerando mi «prestigio» de joven catedrático venido de Princeton, me invitaron y animaron a aceptar formar parte de sus correspondientes proyectos ocupando el vicerrectorado de investigación.

Durante toda una semana tuve que mantener diversas conversaciones, en mi despacho y también por teléfono en casa, argumentando las razones por las que declinaba la oferta. Me parece que mis interlocutores de entonces no creían que pudiera rechazar tal puesto simplemente por tener la investigación propia como prioridad y por considerar que la gestión, por importante que esta fuese, es de otra naturaleza; en otras palabras, que yo no había vuelto de Princeton para dedicarme meramente a gestionar un presupuesto y que mis planes de entonces eran crear un foco de buenas matemáticas en la UAM, dirigir tesis y animar la investigación y los contactos con los centros de excelencia del mundo. Finalmente recibí a una comisión en mi despacho que, después de escuchar de nuevo mis razones y mi disposición a colaborar en el buen funcionamiento de la UAM pero sin ocupar un puesto de tanta dedicación administrativa, me espetó a bocajarro: «quizás lo del vicerrectorado te parece poco y, en realidad, lo que deseas es ser rector».

En ocasiones, al comienzo del verano, tengo que soportar los comentarios de mis vecinos del pueblo de la sierra de Madrid donde resido, quienes, con un cierto retintín, me dicen aquello de: ¿qué, ya de vacaciones? De nada valen mis protestas de que, aparte de mis tareas docentes, está la investigación y que esta no tiene horarios ni demasiados días de asueto. Me parece que en España no se ha educado al pueblo en el aprecio a la investigación científica, pero la anécdota anterior muestra cómo esa carencia se da también entre nuestros universitarios, muchos de los cuales valoran más la gestión y la política universitaria, y no entienden que haya profesores para quienes esas actividades, por lo demás importantes, supongan una rebaja de sus expectativas.

El año 2000 fue declarado por la Unesco «Año mundial de las matemáticas», por lo que la dirección de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), que había sido reconstruida por aquel entonces, después de su práctica disolución tras las actuaciones desastrosas de las anteriores directivas, decidió aprovechar la efeméride para llevar a cabo una labor de legítima propaganda de las matemáticas en las instituciones de nuestro país. Así es que en mi condición de presidente del Comité Científico de la RSME participé, junto al presidente de la Sociedad y otros miembros de su dirección, en reuniones con representantes políticos de los diversos partidos del Parlamento, con objeto de informarles de la situación de la enseñanza e investigación en España y de las medidas que creíamos oportuno propiciar para mejorarlas. En el Senado fuimos recibidos por el presidente de su Comisión Científica quien, después de las oportunas presentaciones, tomó la palabra para describirnos con todo lujo de detalles, durante una larguísima hora, numerosas anécdotas y vicisitudes de sus estudios de bachillerato y sus pésimas relaciones con las matemáticas. No hubo manera de cortarle e introducir alguno de nuestros mensajes. Pasados los sesenta minutos concedidos apareció una secretaria, quien informó a ese benemérito presidente de la Comisión Científica del Senado que su presencia era requerida urgentemente en la sala para una votación, por lo que nos despedimos y no hubo nada más.

Durante los años ochenta colaboré con el Ministerio de Ciencia de entonces participando en diversas comisiones que tenían por finalidad poner al día nuestro sistema de financiación de proyectos (Comisión Asesora de Ciencia y Tecnología); racionalizar los nombres de las cátedras y departamentos universitarios (Comisión de las Áreas de Conocimiento); o lanzar un sistema de retribuir a los investigadores (sexenios de investigación o *gallifantes*, como también se los llamó enseguida a propósito de un concurso televisivo que era popular en aquel tiempo). De manera que ayudando a Juan Rojo, Roberto Fernández de Caleya o a Pedro Pascual, quienes lideraron aquel proceso, participé en esas comisiones que tanta influencia han tenido en el despegue de la ciencia en España en las últimas décadas. Nunca me ofrecí voluntario; me resistía con las consabidas razones que me hacían priorizar la investigación y la dirección de tesis doctorales sobre la gestión. Pero Pedro Pascual siempre acababa convenciéndome con el argumento de que mis publicaciones en *Annals of Mathematics* eran las únicas que él encontraba en esa revista entre los autores españoles de entonces y, por tanto, tenía que colaborar como matemático de referencia en sus proyectos de reforma. En cualquier caso, y haciendo caso omiso del tiempo que tuve que dedicar a esos menesteres, considero un privilegio haber participado en aquellos proyectos que, entre otras consecuencias, pusieron en órbita a las matemáticas españolas.

Esa actividad me produjo, no obstante, algunos choques con algún catedrático de la vieja guardia (incluyendo llamadas telefónicas nada agradables a mi domicilio), cuyo poder e influencias locales no se correspondían con su currículo investigador, por lo que algunos de sus proyectos dejaron de ser financiados a favor de otros investigadores más jóvenes y menos poderosos, pero mucho más activos. En el ministerio se recibieron diversas cartas aludiéndome en términos nada corteses, que las autoridades se encargaban de contestar pasándome a mí copia de los escritos. Se trataba de algo hasta cierto punto natural y asociado al papel que me había tocado desempeñar respecto a la generación anterior a la mía de catedráticos universitarios. Pero con los sexenios pasó algo distinto, ya que todavía me encuentro con antiguos compañeros, e incluso sedicentes amigos, que se sintieron ofendidos y hasta me retiraron el saludo porque la comisión de la que yo formaba parte les calificó negativamente alguno de los tramos que ellos habían solicitado.

Desde entonces ha habido muchas comisiones que juzgan cada año las solicitudes de complementos de investigación. Pero a mí me tocó formar parte de la primera, que evaluó toda la trayectoria anterior de los solicitantes. Fue una comisión mixta, de físicos y matemáticos, cuya primera misión fue establecer los criterios suficientes para otorgar un sexenio. Convinimos que, en el caso de las Matemáticas, bastaría con tener durante esos seis años una publicación en una revista de reconocido prestigio y de circulación internacional (aunque no fuera, necesariamente, una de las mejores o mejor situada en las listas de índice de impacto), más alguna otra publicación de carácter local. Pero nos encontramos con un tremendo dilema, ya que una buena parte de los solicitantes carecían de esa única publicación de calidad contrastada, lo que ocurría mayoritariamente en el área de estadística y en algunas zonas de la matemática aplicada cultivada en las escuelas técnicas. Así es que, una de dos: o se eliminaba ese requisito, con lo cual todas las solicitudes serían evaluadas positivamente perdiéndose el carácter de estímulo inherente a los *gallifantes*; o se producía una auténtica escabechina en esas áreas antes mencionadas. Tengo entendido que el criterio actual es mucho más exigente, pero aquella era la primera vez y nos pareció prudente adoptar otro mucho más relajado y que, una vez establecido, creo entender que se aplicó a rajatabla, sin hacer excepciones y de manera casi automática, lo que, por otro lado, es la única forma razonable de tratar un número tan grande de solicitudes.

Entre las numerosas cartas de protesta que recibió el ministerio destacaba la de un «joven» catedrático de Estadística que había sido positivamente evaluado, por cuanto disponía de un número suficiente de publicaciones homologadas, así como de una trayectoria investigadora en universidades de los Estados Unidos. Pero en su carta de campeón de la estadística española, dirigida al ministro Solana, se quejaba del trato, a su parecer injusto, que había recibido su área, y hacía consideraciones en torno a mi idoneidad e imparcialidad. Recibió por ello la respuesta que las autoridades del ministerio juzgaron apropiado darle, y que tuvieron la deferencia de hacerme llegar.

Ocurre que años más tarde, hacia noviembre de 2010, recibí una invitación del Congreso de los Diputados para asistir a la presentación de un estudio sobre la Universidad propiciado por el grupo socialista y realizado por un grupo de varios catedráticos presidido por aquel estadístico, ahora rector de una importante universidad española. En su alocución, para mi sorpresa y agrado, llevó a cabo un panegírico de los sexenios, a los que puso como ejemplo de una buena política que sirvió para estimular la investigación y propulsó el despegue que ha tenido el número de publicaciones de los científicos españoles en las últimas décadas. Al acabar la sesión esperé en vano unas palabras suyas reconociendo en privado la equivocación de aquella carta y la dureza de sus términos. *¡Vanitas, vanitatis et omnia vanitas!* Esto de rectificar según conviene y no reconocerlo, seguir tan pancho y olvidarse sin más de lo que se dijo y escribió, es seguramente una virtud de los políticos de la que carezco y que me hacen entender las razones por las que nunca quise seguir ese camino.

Me parece apropiado, no obstante, que nuestras autoridades señalen el notable progreso que han experimentado las matemáticas en nuestro país en los últimos tiempos y al que seguramente medidas como la de los sexenios; el aumento sustancial del presupuesto para los proyectos de investigación; la creación de agencias evaluadoras de la calidad; las becas para realizar estudios de doctorado en centros de excelencia mundial y los programas ICREA, Ramón y Cajal y Juan de la Cierva, que han atraído a nuestros centros a buenos jóvenes investigadores de todo el mundo, han logrado que España pase de una proporción ridícula (el 0,4% en torno a 1980), a otra muy digna (4% en 2012) del total de publicaciones en revistas de calidad. Encontrar nombres de matemáticos españoles como conferenciantes invitados en congresos importantes, o firmando artículos de gran calado en revistas prestigiosas es ahora, afortunadamente, algo común y no una excepción como ocurría en el pasado. A pesar de ello, en España la ciencia en general, y las matemáticas en particular, siguen estando bastante invertebradas. Carecemos de esas instituciones de prestigio tales como son la *Royal Society* en Inglaterra o las Academias de Ciencias en Francia, Rusia y Estados Unidos, que sirven para establecer el canon. Al contrario, entre nosotros es todavía posible que personajes de dudosa reputación científica y talante agresivo se hagan con el santo y la limosna, consiguiendo del poder político financiación cuantiosa para sus a menudo disparatados proyectos. Las vicisitudes de algún abortado instituto de investigación de matemáticas de la Comunidad de Madrid son un ejemplo muy reciente. Otro algo más lejano, aunque no menos significativo, es el descrito en la siguiente página de la revista *Gaceta Matemática*:

NOTA DE LA REDACCION

La Redacción de *Gaceta Matemática* tiene el desagradable deber de disculparse ante los lectores de la revista y ante el Profesor P. A. Raviart por haber admitido el artículo firmado por [redacted], titulado «Interpolación Funcional en R^n», publicado en el tomo XXIX de *Gaceta Matemática*, páginas 39-52, que es una reproducción de unas notas multicopiadas del curso de P. A. Raviart, titulado *Elementos finitos*, explicado en el año 1971 en la Univeridad de París, VI. El contenido del mencionado artículo corresponde a las páginas IV.1 a IV.22 de la referida nota del curso de P. A. Raviart.

Gaceta Matemática publica artículos de exposición de temas de interés para sus lectores, pero lo que, evidentemente, no puede hacer es reproducir, como en este caso, un trabajo, no fielmente transcrito, de un autor sin su permiso.

Evidentemente que el señor [redacted] no hace una traducción literal del trabajo, pero lo que se puede comprobar es que todo el contenido del artículo del señor [redacted] está en las notas del Profesor P. A. Raviart. Las variantes son del siguiente tipo: Sr. [redacted], página 39, línea 9: «Se designa por P el espacio de dimensión finita de las funciones de valor definidas sobre K».

P. A. Raviart, pág. IV.1, línea 8: «Soit d'autre part P un espace de dimension finie de functions à valeurs réelles definies sur K». (La falta de la palabra reales en la expresión del señor [redacted] hace que la frase carezca de sentido.)

Señor [redacted], pág. 40, línea 1: «Caso 1...». P. A. Raviart, pág. IV.6, línea 1: «Exemple 2.1...».

Señor [redacted], pág. 40, línea 10: «Caso 2...». P. A. Raviart, página IV.7: «Exemple 2.2...». Etcétera.

Señor [redacted], pág. 42, línea 16: «Lema...». P. A. Raviart, página IV.9: «Lemme 2.1...».

Señor [redacted], pág. 45, línea 16: «Lema...». P. A. Raviart, página IV.3: «Lemme 1.2...».

Señor [redacted], pág. 46, línea 8: «Designemos por P_k el espacio de polinomios de grado k; ...». P. A. Raviart, pág. IV.13, línea 3: «... les espaces de polynômes P_k de degré $\leq k$ ...». (Con la definición del señor [redacted] de P_k no es válida la relación de la línea 12: $Q_k \subset P_{2k}$. que sí lo es con la de Raviart.)

Lo mismo acontece en lo que resta del artículo.

Lo más grave de todo este penoso asunto, es que el señor [redacted] se olvida de incluir, entre la bibliografía, las mencionadas notas multicopiadas de P. A. Raviart.

Por el Comité de Redacción:

P. Abellanas.

El señor X aludido en el escrito del profesor Abellanas es catedrático de Matemática Aplicada en un centro importante, plaza que consiguió al poco de publicar en la *Gaceta* ese artículo, que era consecuencia de su tesis doctoral. Ha desempeñado varios cargos universitarios relevantes, tales como rector comisario en la creación de una nueva Universidad española, y presidente del Consejo de Universidades. Además, con una cierta periodicidad, suele regalarnos con artículos moralizantes en la prensa acerca de los problemas de nuestra Universidad y las medidas que, según su opinión, habría que tomar para mejorar la calidad de la docencia, la investigación, combatir la endogamia o integrarnos en el espacio universitario europeo: «¡Cosas veredes, Sancho!».

La irrupción de los ordenadores ha potenciado el papel que las matemáticas desempeñan en la tecnología, pero existe también en el mundo desarrollado otro empleo de los matemáticos que no tiene tanto que ver con su dominio de las herramientas de cálculo, cuanto con su entrenamiento para detectar los parámetros relevantes de una situación compleja, describir los diversos escenarios posibles de su evolución, o bien realizar las preguntas adecuadas que permiten, por ejemplo, identificar los puntos débiles de una cadena de producción. De manera que entre mis colegas y colaboradores los hay que realizan, a tiempo parcial, consultorías para diversas agencias gubernamentales o empresas privadas de su país. Sin embargo, esa actividad es todavía muy escasa en España: durante toda mi carrera universitaria, la única vez que he sido consultado sobre un asunto fuera de la universidad, lo fue por un bufete de abogados para… ¡interpretar un texto del BOE!

En 1990 tuve la oportunidad de conocer personalmente a Ernest Lluch, ex ministro de Sanidad y rector de la Menéndez Pelayo, durante su visita a la joven Escuela de Sociología del *IAS* de Princeton. Lluch había entablado amistad con un matemático distinguido, profesor del Instituto, que era también mi colaborador y amigo. Enseguida hicimos planes para crear, dentro de la Universidad Menéndez Pelayo, una Escuela Internacional de Matemáticas codirigida por varios profesores del *IAS* y de la Autónoma de Madrid. El proyecto se convirtió en una realidad que funcionó divinamente: cursos de Ecuaciones Diferenciales, Mecánica de Fluidos, Teoría de Números y Criptografía, en los que participaron los mejores especialistas del mundo dontándose becas para estudiantes españoles y extranjeros. Para el rector de la UIMP esta Escuela Internacional de Matemáticas era un modelo del tipo de cursos que deseaba propiciar en la Universidad de verano.

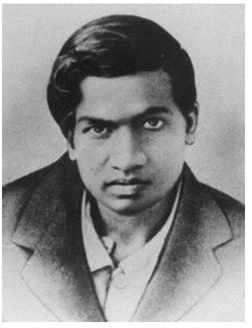
Cuando se ha perdido a un amigo, y mucho más si lo ha sido de forma tan violenta e injusta como fue la de Ernest, es difícil evitar sentimientos de rabia y tristeza profunda, y nos queda solo el consuelo de recordar su vida y su obra. Tras su vil asesinato pudimos leer las semblanzas realizadas por personas que le fueron cercanas y que atestiguan de su entrañable humanidad y gran cultura. Por mi parte puedo añadir su demostrado interés para que las Matemáticas tuviesen un lugar destacado en la programación de la UIMP; y la añoranza de aquellas deliciosas veladas santanderinas en las que, socarrón, nos contaba historias tan divertidas como la estimulación, plumero en mano, del toro Sultán, que había sido adquirido por la administración cántabra para mejorar su cabaña. Pero también proliferaron entonces en los medios de comunicación artículos y declaraciones de intelectuales y analistas políticos, la mayoría repitiendo los mismos lugares comunes y diluyéndose en tópicos, palabras y más palabras, que parecían lanzadas con la esperanza de encontrar algo que decir.

Afortunadamente, parece que asistimos al final de la banda autora de aquel crimen, y la atención en España se centra ahora en la evolución de los nacionalismos separatistas y en la pavorosa crisis económica producida en parte por la burbuja inmobiliaria y la especulación financiera. Los medios de comunicación nos dan cuenta de los sofisticados métodos informáticos, de propaganda y de manejo ilegal de fondos económicos que utilizan las diversas organizaciones mafiosas, terroristas y también algunos partidos políticos. Pero, salvo unos pocos casos, decepciona la falta de claridad en los análisis, tanto en la determinación de los protagonistas cuanto en la descripción de los escenarios, de los intereses, de las implicaciones y de las cuentas económicas. En general, se echa en falta la exigencia de que los argumentos esgrimidos sean adecuados, las premisas ciertas y las conclusiones pertinentes. En el caso del terrorismo, por encima de los comandos constituidos por individuos más o menos descerebrados y fanatizados, han dominado siempre unos cuadros bien preparados y competentes en la administración lucrativa del terror, como también lo estarán, seguramente, todos esos banqueros y políticos corruptos que nos han llevado al desastre económico actual. Solo cabe esperar, y desear, que los políticos más responsables de nuestras democracias cuenten con los medios y con las personas preparadas para analizar los escenarios posibles y asesorarles en la toma de decisiones. ¿O acaso les ocurre como a Felipe II, rodeado de aficionados mientras Vieta trabajaba para sus enemigos?

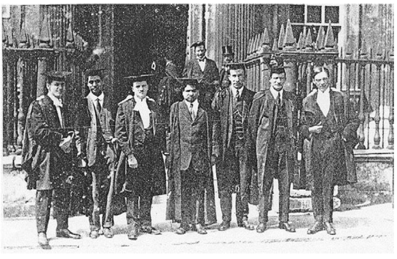
6.
Un halo de romanticismo

En matemáticas, como en la vida misma,
a veces conviene integrar, sólo, la parte positiva
Antoni Zygmund.

El día 22 de diciembre de 2012 se cumplió el centésimo vigésimo quinto aniversario del nacimiento de Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920). Por este motivo, se han organizado congresos en las Universidades de Florida (EEUU) y Mysore (India), y se han publicado artículos como los del *Notices* de la *American Mathematical Society*, que muestran el impacto creciente de su obra en las matemáticas creadas desde la conmemoración de su centenario, hace ahora veinticinco años.


S. Ramanujan (1887-1920)

Tratándose de Ramanujan cabe preguntarse si el número de esa efeméride, 125, hubiera tenido para él algún significado especial, aparte de que 125 sea igual a cinco elevado al cubo, por lo que si lo escribimos en base 5 obtendremos 1000, que es una cifra mucho más redonda e imponente. Podemos aquí recordar la famosa anécdota en torno al número 1729, cuando su amigo y protector Godfrey H. Hardy lo visitó en el hospital y le contó que la matrícula del taxi que le había llevado era 1729; un entero algo anodino, añadió Hardy, a lo que Ramanujan, desde su lecho de enfermo, contestó: «¡No, Hardy, no!… 1729 es un número muy interesante, ya que se trata del entero menor que puede ser expresado de dos maneras distintas como suma de dos cubos, $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.» Hardy, sorprendido, le preguntó a renglón seguido si conocía la respuesta para las cuartas potencias, a lo que Ramanujan contestó que no podía verla en ese momento, pero que tendría que ser un número muy grande. Con la ayuda de un ordenador, sabemos ahora que se trata de $635\,318\,657 = 134^4 + 13^4 = 158^4 + 59^4$, pero todos podemos ver en ese maravilloso ejemplo el inicio de unas preguntas y de una teoría fecundas que trascienden la anécdota que las originó. Ilustra también la tendencia de Ramanujan a considerar los ejemplos especiales por delante de las construcciones más generales. Tanto en sus celebrados *Cuadernos de notas,* como en su correspondencia con Hardy, se recrea en presentar casos particulares que resultan ser especialmente significativos, antes que describir el panorama más general que estaba subyacente.



Ramanujan en Cambridge

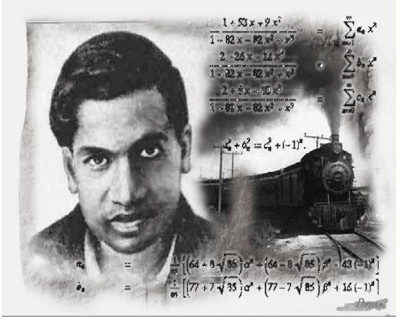
El talento de Ramanujan tiene difícil parangón. La mayoría de los matemáticos poseemos una cierta intuición geométrica, pero la intuición aritmética, aquella que permite detectar las cancelaciones ocultas y los patrones y simetrías en series numéricas es *rara avis,* y sus poseedores, como Euler y Ramanujan, nos maravillarán siempre con fórmulas, identidades y cálculos tan sorprendentes y fascinantes ahora como lo fueron noventa o cientos de años atrás. Ramanujan poseía una potente intuición algebraica y combinatoria, y unas habilidades para la manipulación de series, algoritmos y fracciones continuas muy por encima de cualquier otro matemático conocido. Durante los cinco años que duró su estancia en Cambridge, en tiempos de la Primera Guerra Mundial, publicó veintiún artículos de investigación, cinco de los cuales lo fueron en colaboración con Hardy. Las siguientes referencias son una buena base de partida para quienes deseen profundizar en su obra:

- *Collected papers of S. Ramanujan.* American Mathematical Society, 1962.

- S. Ramanujan: *Notebooks*. Tata Institute, 1957.
- S. Ramanujan: *The lost notebook.* Springer, 1988
- Bruce Berndt y Robert A. Rankin: *Ramanujan: Letters and commentary.* American Mathematical Society-London Mathematical Society, 1997.

Las vicisitudes de su existencia lo han envuelto siempre con un cierto halo de romanticismo. El mismo Hardy escribió que haber conocido a Ramanujan fue «el capítulo romántico de su vida», y ese mismo adjetivo ha sido usado por quienes han escrito su biografía, novelas y obras teatrales basadas en ella. Un ejemplo es la obra de Robert Kanigel (1991) *The man who knew infinity: a life of the genius Ramanujan*; otro más reciente es *The indian clerk* (2007), de David Leavitt (traducida al castellano por 'El contable hindú' y publicada por Anagrama en 2011). Niels Henrik Abel y Évariste Galois son otras figuras del Olimpo matemático que comparten romanticismo con Ramanujan. Como él, fueron también genios precoces, incomprendidos en sus comienzos, y fallecieron además en plena juventud, por lo que siempre quedará la duda de cuál hubiese sido su legado de haber disfrutado de una vida más larga, o de una existencia más acomodada.

Resulta ahora muy fácil encontrar en internet una amplia información sobre la vida de Ramanujan: sus orígenes humildes en Kumbakonan, cerca de Madrás; la personalidad un tanto dominadora de su madre, Komalatammal, y el trato desconsiderado que esta dio a la joven esposa de Srinivasa; sus problemas en la Universidad de Madrás, donde perdió la beca por haber descuidado las asignaturas que no eran de matemáticas; sus manuscritos con teoremas y fórmulas maravillosas que finalmente supo apreciar Hardy y que le valieron la invitación para viajar a la Universidad de Cambridge; el supuesto sueño de su madre en el que la diosa Namagiri de Namakkal, de la que era devota, le ordenó no interponerse en el camino de su hijo permitiéndole viajar a Inglaterra; sus años en Cambridge, donde tuvo problemas con el clima, que le resultaba demasiado frío, y con la alimentación, en su caso estrictamente vegetariana y difícil de abastecer en aquellos tiempos de Guerra Mundial; su enfermedad, que fue diagnosticada como tuberculosis; y su vuelta a la India, donde falleció al cabo de poco tiempo.

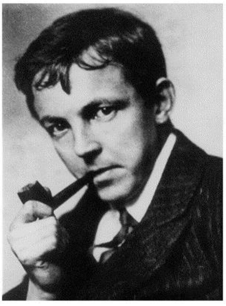


Le debo a un magnífico profesor que tuve en el bachillerato mis primeros contactos con la biografía y la personalidad de Ramanujan. Luego, ya durante mis estudios de doctorado en Análisis Armónico (área en la que los teoremas de Hardy y Littlewood, los dos colaboradores de Ramanujan en Cambridge, desempeñan un papel fundamental), me familiaricé con el «método del círculo» de Hardy-Ramanujan-Littlewood, que los dos primeros introdujeron para obtener su fórmula de las particiones. El «método del círculo» forma ahora parte de mi propia obra matemática, y lo he usado para entender las propiedades de series trigonométricas interesantes, cuyas frecuencias son potencias de los enteros, y para demostrar el carácter fractal de sus gráficas. Con él empecé a disfrutar de las ideas de Ramanujan y de sus resultados en teoría de números, tales como el que nos da el promedio de divisores primos de un número natural. Pero ha sido mucho después, y a medida que mi horizonte matemático se ha ido ampliando, cuando he podido apreciar toda la originalidad y profundidad de la obra de Ramanujan y la visión modular, tan adelantada a su tiempo, que supo desarrollar.

Las siguientes son un ejemplo de las numerosas fórmulas que Ramanujan envió a los profesores de Cambridge en su primer manuscrito, junto con los comentarios a que dieron lugar:

$$\frac{e^{-2\pi/5}}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$\frac{e^{-\pi/5}}{1+\dfrac{e^{-\pi}}{1+\dfrac{e^{-2\pi}}{1+\ldots}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ .$$



G. H. Hardy (1877-1947)

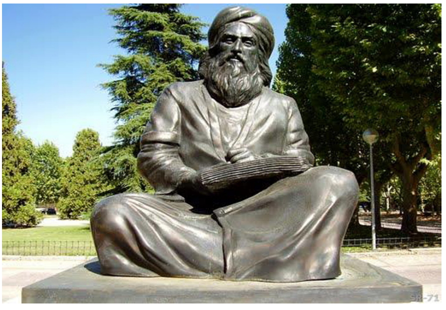
Hardy: «Estas fórmulas me derrotaron completamente. Yo no había visto antes nada como esto. Una simple mirada resultaba suficiente para darse cuenta de que solamente las podría haber escrito un matemático de primera clase. Debían ser verdad, porque nadie puede tener la imaginación suficiente para inventárselas: ¿de dónde venían estas fórmulas, y por qué eran verdaderas?».

Por cierto, Godfrey Harold Hardy, a quien hemos citado en repetidas ocasiones a lo largo de este libro, es una figura matemática central del siglo XX que merecería por sí misma la atención de cualquier ciudadano culto, siendo su obra *A mathematician apology* una lectura obligada para quien esté interesado en las relaciones existentes entre la ciencia, el arte y la literatura.

Resolviendo ecuaciones

Los otros dos personajes mencionados, Abel y Galois, tienen también mucho en común, habiendo vivido ambos dentro del período histórico del romanticismo. Con sus magníficas obras contribuyeron a la solución de uno de los problemas que fascinó a los matemáticos durante siglos, a saber, hallar las raíces de una ecuación polinómica.

De niños aprendimos a resolver la ecuación de segundo grado, algo que ya sabían hacer los antiguos babilonios. La mayoría memorizó simplemente la regla que daba las raíces en términos de los coeficientes del trinomio, pero también hubo privilegiados a quienes un buen profesor les enseñó la estrategia de completar el cuadrado. Lo que geométricamente significa trasladar el origen de coordenadas al vértice de la parábola que la representa en un sistema de coordenadas cartesianas. Sin embargo, la ecuación cúbica es otro asunto y su solución suele ser todavía un arcano para la generalidad de los ciudadanos.



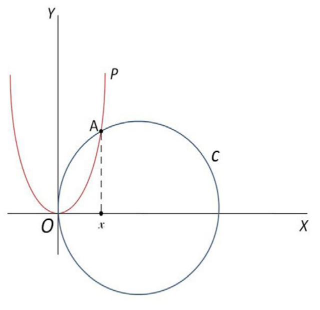
Escultura de Omar Jayyam (UCM, Madrid)

Tiene, no obstante, una interesante y a veces pintoresca historia, uno de cuyos capítulos más fascinantes estuvo protagonizado por Omar Jayyam (*circa* 1048-1131). Matemático, astrónomo y poeta persa, que nació en Nishapur, y cuya vida fue novelada por Amir Maalouf en una espléndida obra titulada *Samarcanda*, que es precisamente la ciudad donde residió Omar la mayor parte de su vida y en la que desempeñó diversos cargos de asesor en la corte del sultán Malik.

Jayyam investigó las ecuaciones y se cree que a él debemos la notación x para designar a la incógnita, a la que en un principio llamaba *cosa* o *algo* en árabe. Posteriormente pasó a ser *xay* en la traslación fonética, de la que luego nos quedó solamente la inicial x. Fue autor del libro *Demostraciones de los problemas del álgebra* que, sin duda alguna, es uno de los tratados más importantes anteriores al Renacimiento, pues incluye métodos geométricos para resolver las ecuaciones cúbicas a través de la intersección de dos secciones cónicas. Fue también un precursor en el uso de las coordenadas que hoy llamamos *cartesianas,* como también parece ser que lo fue en conocer el teorema del binomio y en haberse preocupado por analizar el controvertido axioma de las paralelas, enunciado en los *Elementos* de Euclides.

He aquí, en lenguaje moderno, las instrucciones que sugiere Omar Jayyam para resolver la ecuación $x^3 + ax = b$, donde a y b son números reales positivos:

1) constrúyase una circunferencia C de ecuación $y^2 = x\ (b/a - x)$, cuyo centro es el punto de coordenadas $(b/2a,\ 0)$ y cuyo radio es $b/2a$;
2) dibújese ahora la parábola P de ecuación $y = x^2 / \sqrt{a}$



Entonces, la abscisa x del punto A, intersección de estas dos curvas, satisface la ecuación propuesta.

En la obra de Jayyam encontramos construcciones similares para todos los tipos de cúbicas, escritos de manera que el término x^2 haya desaparecido, lo que se logra con un cambio adecuado de variables, precisamente el que hace que la suma de las tres raíces se anule. Lo que equivale a escribir la cúbica de forma que «su centro de gravedad» esté en el origen: si z_1, z_2 y z_3 fuesen esas tres raíces tendríamos la identidad $ax^3 + bx^2 + cx + d = a\ (x - z_1)\ (x - z_2)\ (x - z_3)$, por lo que $b = -a\ (z_1 + z_2 + z_3)$. Pero como los números negativos, y con más razón los complejos, no estaban entonces a su disposición, Jayyam y el resto de los matemáticos de su tiempo se veían obligados a considerar las diversas clases de cúbicas, tales como $x^3+ax=b$, $x^3 = ax + b$, $x^3 + ax + b = 0$, y mostrar construcciones geométricas *ad hoc* para resolver cada una de ellas.

Además de matemático y astrónomo, Omar Jayyam era también un poeta, y un ilustrado epicúreo, *bon vivant* que diríamos ahora, o por lo menos eso es lo que traslucen sus celebradas cuartetas (*Rubaiyat*). He aquí una muestra:

Nada me interesa ya. ¡Levántate para escanciarme vino!
Esta noche tus labios son la más bella rosa del universo…
¡Vino!, que sea rojo como tus mejillas,
y que mis remordimientos sean tan ligeros como son tus rizos.

Un jardín, una cimbreante doncella,
un cántaro de vino, mi deseo y mi amargura.
He ahí mi paraíso y mi infierno.
Pero, ¿quién no ha recorrido el cielo y el infierno?

El mundo inabarcable: un grano de polvo en el vacío.
Toda la ciencia del hombre: palabras.
Los pueblos, las bestias y las flores de los siete climas: sombras.
El fruto de tu constante meditación: la nada.

Todos los hombres quisieran caminar por la senda del conocimiento.
Unos buscan esta senda, otros afirman que ya la han encontrado.
Pero un día una voz gritará:
¡no hay senda ni camino!

A. C.

El Renacimiento

Haciendo breve, como suele decirse, esta larga historia, el *tempo* de su siguiente capítulo es el siglo XVI; el *locus* fue Italia y los *dramatis personae* fueron, principalmente, Scipione del Ferro, Niccolò Fontana (alias Tartaglia), Gerolamo Cardano y Ludovico Ferrari.

Scipione del Ferro, que era profesor en la Universidad de Bolonia, descubrió la solución de la ecuación cúbica $x^3 + ax = b$, cuando a y b son números positivos. Pero no publicó su hallazgo, aunque sí se lo confió a su discípulo Antonio María Fiore, porque en el siglo XVI los descubrimientos se mantenían en secreto, ya que el prestigio científico y la renovación de los contratos universitarios dependían mucho del resultado de las competiciones públicas en las que cada contrincante planteaba problemas a sus adversarios, por lo que nadie quería dar ventaja a sus posibles competidores. Aunque ahora eso nos pueda parecer sorprendente, sin embargo, hasta finales del siglo pasado aún estaba vigente en España el sistema de oposiciones a cátedra en el que uno de los ejercicios, popularmente llamado «la trinca», consistía precisamente en poner objeciones a los resultados presentados por los otros opositores. En el caso particular de las Matemáticas existe la leyenda de que en una oposición a cátedra de Geometría Algebraica un candidato presentó una publicación demostrando que la equivalencia que su co-opositor decía haber probado en su principal trabajo no se sostenía, porque la condición planteada no solo distaba mucho de ser necesaria, sino que tampoco resultaba suficiente. Pero eso ocurrió poco después de finalizar la Guerra Civil y, según la misma leyenda el candidato más afecto al régimen franquista, que a la postre resultó vencedor, presentó diversos méritos de guerra, a los que el otro, con cierto humor, respondió con un certificado de haber recibido la bendición *urbi et orbi* en la mismísima plaza del Vaticano.

Durante cierto tiempo después del descubrimiento de Del Ferro no ocurrió nada especialmente relevante en el área, hasta que entró en escena Niccolò Fontana quien, de joven, había recibido en su cara un tremendo golpe de sable propinado por un soldado del ejército francés que atacó Brescia, su ciudad natal. Según la leyenda, el niño logró sobrevivir gracias a que un perro le curó lamiéndole las heridas. Sea como fuere, la consecuencia es que nunca después pudo hablar con claridad, y de ahí le vino el apodo de Tartaglia, el tartamudo. Luego se dedicó a las Matemáticas, ejerciendo de profesor en varias universidades italianas, al tiempo que desarrolló un carácter un tanto exhibicionista y pendenciero. Famoso fue el desafío que sostuvo con Antonio María Fiore, en el que ambos se retaron en un duelo académico público, cuyas reglas imponían que cada participante propusiera treinta problemas a su oponente, que debían ser resueltos en un plazo de cincuenta días y cuyo premio consistía en treinta comidas en un «restaurante de categoría» que sufragaría el perdedor.

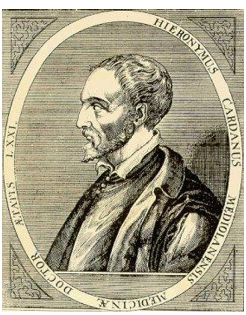
Tartaglia planteó un conjunto de problemas más variado, pero Fiore se limitó a proponer una serie de ecuaciones cúbicas que podían ser resueltas con el método de su maestro Del Ferro. El desafío lo ganó Tartaglia quien, según su propio relato, consiguió, ya casi al final del plazo establecido, encontrar una manera eficiente de resolverlas que podía aplicarse a todos los tipos de cúbicas y no solamente a las que había propuesto Fiore.

El siguiente actor de este drama es Girolamo Cardano (1501-1576), un personaje renacentista de los más exuberantes de la historia de las Matemáticas, quien enterado del triunfo de Tartaglia le suplicó que le hiciera partícipe de su fórmula secreta para resolver la cúbica. En su autobiografía *El libro de mi vida*, escrita en 1575, Cardano afirma que no fue concebido de manera legítima y que trataron en vano de hacer abortar a su madre con diversas pócimas, por lo que nació medio muerto y, para reanimarlo, lo metieron en un baño de vino caliente. Con estos principios, no debe pues extrañarnos que sufriera muchas dolencias a lo largo de su vida tales como violentas palpitaciones, supuraciones diversas, extremo temor a las alturas e impotencia sexual, aunque según él mismo afirma, esta le desapareció un poco antes de contraer matrimonio.

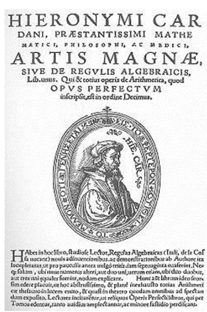
Logró terminar sus estudios de Medicina en la Universidad de Padua, pero al principio no pudo ejercerla en su ciudad natal, Milán, porque su pésima reputación le impedía ser aceptado allí por el Colegio de Médicos. Fue también un popular astrólogo, y escribió tratados sobre medicina, religión, juegos y matemáticas, logrando ya en su madurez un cierto reconocimiento como médico. Llegó a tener entre sus pacientes al mismísimo arzobispo de Escocia, quien creía padecer tuberculosis, enfermedad que Cardano, sin fundamento alguno, aseguraba poder curar. Afortunadamente para el arzobispo, y también para Cardano, resultó que la dolencia era un problema asmático que Cardano ayudó a paliar. A su vuelta, de paso por Londres, fue recibido por el rey Eduardo VI, a quien predijo, en el horóscopo que le hizo, una larga y próspera vida, aunque el joven monarca murió poco tiempo después. En distintas épocas Cardano fue profesor de Matemáticas en las Universidades de Milán, Pavía y Bolonia, aunque siempre acabó dimitiendo por verse involucrado en algún escándalo. Así, en el año 1562 tuvo que abandonar Milán, la ciudad de sus triunfos y tragedias, y se trasladó a Bolonia, donde ejerció la enseñanza de la medicina. Allí fue encarcelado en 1570 por la Inquisición, acusado de herejía, por haber realizado el horóscopo de Cristo y escribir el libro *En homenaje a Nerón*. Sorprendentemente, salió de la cárcel para ser empleado en el Vaticano como astrólogo de la corte papal.

Cuando Cardano supo del duelo académico entre Fiore y Tartaglia, intentó convencer a este último para que le contara su fórmula de resolución de la cúbica. Le ofreció publicarla dándole el debido crédito por tan gran descubrimiento en *Practica arithmeticae*, que era el libro que estaba por entonces escribiendo. Pero Tartaglia no aceptó, ya que opinaba que la historia citaría al autor del libro y no al de la fórmula. No obstante, Cardano insistió, porfió y prometió guardar el secreto y no publicarlo, de manera que al final Tartaglia cedió y le puso al tanto de sus resultados. Entra entonces en escena Ludovico Ferrari, un joven y brillante ayudante de Cardano, con quien este había compartido la solución de Tartaglia. Ferrari encontró un procedimiento para resolver la ecuación de cuarto grado, pero reduciéndola a otra de tercero. De manera que Ferrari y Cardano tenían un magnífico resultado que no podían publicar, porque dependía de otro, cuyo autor les prohibía hacerlo.

La siguiente vuelta de tuerca de este truculento asunto acaeció en el año 1543, cuando Cardano y Ferrari viajaron a Bolonia, donde pudieron examinar los papeles póstumos de Scipione del Ferro, quien estuvo en el origen de esta historia unos treinta años atrás. Encontraron, escrita de la propia mano de Del Ferro, la solución de la cúbica y por tanto el alivio de poder publicarla sin violar el juramento que les había exigido Tartaglia. De esta manera apareció la obra maestra de Cardano, *Ars magna,* cuyo capítulo XI, de los cuarenta que consta el libro, se titula «Sobre el cubo y la primera potencia igual a un número» y contiene la codiciada fórmula. En la introducción del *Ars magna* se encuentra la siguiente frase de Cardano: «Scipio Ferro de Bolonia descubrió esta regla hace treinta años y la pasó a Antonio María Fiore de Venecia, cuyo duelo contra Niccolò Tartaglia de Brescia le dio a este la ocasión de descubrirla. Me la dio a mí como respuesta a mis requerimientos, aunque no me permitió mostrarla».



G. Cardano (1501-1576)


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Ars magna

N. Fontana Tartaglia (1499-1557)

A pesar de que el proceder de Cardano nos pueda parecer impecable, teniendo en cuenta su dudosa reputación en tantos otros asuntos, no pudo evitar la reacción enfurecida de Tartaglia y el estallido de una controversia que se llevó con maneras nada apolíneas, por decirlo de forma suave. No obstante, ahora sabemos que Cardano representaba el porvenir en la difusión de la ciencia, mientras que aquellos métodos de desafíos y secretismo eran claramente del pasado. También nos consta que el problema en sí, es decir, en cuanto a poder calcular efectivamente las raíces, no es tan relevante porque las fórmulas explícitas obtenidas no suponen una gran ventaja respecto a los algoritmos efectivos que se descubrieron luego, por ejemplo el diseñado por Newton, si se trata de aproximar el valor de las raíces con suficiente precisión. Sin embargo, las teorías que se crearon a partir de las fórmulas del Renacimiento por los matemáticos del siglo XIX, persiguiendo ese objeto del deseo que fue extenderlas a grados superiores, dieron lugar a nuevas matemáticas y a una interesante interacción con la física. Pero antes de llegar a eso nos encontraremos otra vez con François Viète (Vieta, demonio de Felipe II), el gran algebrista que interpretó la fórmula de Del Ferro a través de la transformación $x = a/y - y$, que convierte la ecuación cúbica $x^3 + 3ax = 2b$ en la ecuación $y^6 + 2by^3 = a$, que es de segundo grado en y^3. Sorprende de nuevo que algo tan sencillo hubiese pasado inadvertido a tantos talentos durante tantos siglos. Pero es que entonces la naturaleza de los números negativos, irracionales y complejos (sobre todo) distaba mucho de estar clara, y su desconocimiento impedía realizar las sencillas operaciones que ahora están a nuestro alcance.

El problema, tiempo después

Desde la aparición de *Ars magna,* encontrar la fórmula para resolver las ecuaciones de grado superior se convirtió en el gran objetivo que atrajo la atención y el esfuerzo de los matemáticos. En particular, con la de grado cinco, y mediante diversos cambios de variable, se llegó a reducirla a la forma $x^5 + px = q$, pero no se logró ir más allá. Ni tan siquiera Euler y Lagrange, quienes trataron en vano de reducirla a otra de grado menor, tal como había hecho Ferrari con la de grado cuatro. Fue el joven noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) quien, con tan solo diecinueve años de edad, logró demostrar que no existe una fórmula que, combinando los coeficientes de la ecuación con las operaciones aritméticas, junto a la extracción de raíces de cualquier orden, nos proporcione, en un número finito de pasos, la solución buscada. Luego Évariste Galois (1811-1832) culminó el proceso con su teoría que permite determinar cuándo una ecuación polinómica cualquiera es, o no es, resoluble por radicales.

Pero también encontramos a Gauss, *Princeps mathematicorum,* quien en su tesis doctoral del año 1799 demostró el ahora llamado teorema fundamental del álgebra: «Todo polinomio se factoriza completamente en factores lineales dentro del cuerpo de los complejos». En otras palabras, el cuerpo de los complejos es algebraicamente cerrado, de manera que si los complejos se crearon para resolver las ecuaciones de segundo grado, resulta que allí se encuentran todas las raíces de las de cualquier grado que consideremos. El teorema de Gauss nos dice que las raíces, "haberlas, haylas", pero no nos abastece con una receta para calcularlas. En otras palabras, queda la pregunta: ¿es posible encontrar fórmulas explícitas usando raíces como en la de los babilonios o los italianos del Renacimiento? La respuesta dada por Abel y Galois es negativa, y su gestación debe mucho al trabajo de Lagrange y Ruffini, quienes habían entendido la solubilidad de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado en términos de la estructura de las permutaciones de sus raíces. En los trabajos de Galois y de Abel aparecen las nociones de *polinomio irreducible,* de *cuerpo de números* y de *grupo de transformaciones.* Toda ecuación tiene asociado un grupo de transformaciones de sus raíces que dejan invariantes al cuerpo de los coeficientes. La solubilidad por radicales de la ecuación se refleja en las propiedades de ese grupo. Así lograron demostrar que, para grado mayor o igual que cinco, la ecuación general no es resoluble por radicales. De manera que no es que no seamos lo suficientemente inteligentes para encontrar la fórmula de la ecuación de quinto o mayor grado, lo que ocurre es que ¡esa fórmula no existe! La teoría de Galois constituye un capítulo muy importante de las matemáticas con aplicaciones insospechadas, que van mucho más allá de los problemas que estimularon su creación. Representó un auténtico avance revolucionario, cuya naturaleza salta a la vista sin más que considerar la enorme dificultad intrínseca que supone la idea de demostrar que una fórmula no pueda existir.

El espín del electrón fue descubierto en 1925 y explicado poco tiempo después por Eugene Wigner y Hermann Weyl en términos de la teoría de grupos. La cuestión era cómo entender los dos estados del electrón (digamos espín arriba o espín abajo), que a su vez describen la separación de las líneas del espectro cuando se disponen los átomos emisores dentro de un apropiado campo magnético.

La respuesta radicaba en comprender un grupo llamado SU(2), que está relacionado íntimamente con el grupo de las rotaciones del espacio tridimensional. Los dos estados del espín del electrón se interpretan en términos de unos objetos llamados representaciones fundamentales de SU(2), que son elementos del análisis armónico de ese grupo, algo así como las funciones trigonométricas que nos encontramos en la teoría de Fourier. Podemos afirmar que, desde esa observación de Wigner y Weyl, las aplicaciones de la teoría de grupos a la mecánica cuántica han ido *in crescendo.* Al principio se trataba de describir las leyes de la naturaleza, pero posteriormente se originó un punto de vista según el cual los grupos eran parte misma de la formulación de la ley.

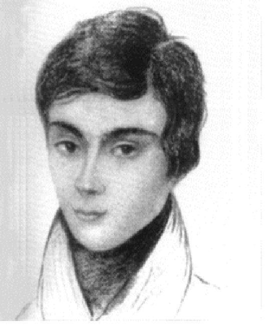
Ocurre que las fuerzas nucleares no dependen de las cargas eléctricas de las partículas involucradas. Werner Heisenberg describió esta independencia en términos de la invariancia de las fuerzas nucleares bajo una simetría que relaciona los protones con los neutrones, y denominó el fenómeno con el término *espín isotrópico*, que permite considerar al protón y al neutrón como dos estados distintos de una misma partícula llamada *nucleón*. Pero resulta que estos estados vienen caracterizados por una «representación bidimensional» de ese grupo SU(2).

En el año 1961, Murray Gell-Mann propuso extender la simetría protón-neutrón al grupo mayor SU(3). Además de explicar la independencia de la carga de las fuerzas nucleares y de proporcionar una nítida clasificación de las partículas elementales conocidas, observó que las representaciones del grupo que se correspondían con dichas partículas podían ser construidas a partir de los productos de dos representaciones fundamentales, a las que llamaron *quarks*. Siguiendo ese juego se pudo predecir la existencia de una nueva partícula que poseería una propiedad que llamaron *extrañeza* y que fue encontrada en 1964, y así hasta el hallazgo del célebre bosón de Higgs.

Durante su corta vida, Abel (1802-1829) no cesó de estar interesado en encontrar la fórmula para obtener las raíces de un polinomio. Siendo casi un niño creyó haberla obtenido para los de quinto grado, y cuando descubrió su error no cejó hasta demostrar la revolucionaria hipótesis contraria. Nacido en la isla noruega de Finnöy, donde su padre ejercía de pastor protestante mientras participaba activamente en política dentro de las filas independentistas, tuvo una infancia precaria debido a las turbulencias políticas y económicas que afectaron a Noruega en unos tiempos en los que logró la independencia, primero de Dinamarca y luego de Suecia, pero dentro del escenario global de la confrontación entre Inglaterra y Francia. Afortunadamente para Abel, su profesor de matemáticas, Bernt Holmboë, supo detectar sus cualidades y le ayudó decisivamente en su carrera, que ha dejado una huella profunda en la ciencia: no solamente por el resultado que estamos considerando, sino también por su teoría de integrales elípticas y de los métodos de sumación de series infinitas. Abel es una gloria de su país, Noruega, que ha instituido un premio en su honor, el Premio Abel, que es un análogo al Nobel para las Matemáticas*.

En el año 1825, realizó un viaje por Francia y Alemania en el que no tuvo demasiado éxito tratando de recabar la atención de los Cauchy, Legendre o Gauss hacia sus excelentes manuscritos. Aunque sí logró contactar con August Leopold Crelle, en cuya revista aparecieron luego publicados sus resultados, que le dieron una merecida fama y unas ofertas de cátedras que no pudo disfrutar por cuanto le llegaron demasiado tarde: Abel murió en la indigencia afectado por el mal «romántico» de la tuberculosis, del que empeoró tras un largo trayecto en el invierno noruego para encontrarse con su joven amada.

N. Abel (1802-1829)



É. Galois (1811-1832)

* Es de sobra conocido que no hay un premio Nobel de Matemáticas, aunque las Fields Medals, otorgadas cada cuatro años en el congreso de la *International Mathematical Union*, y el más reciente premio Abel sean reconocimientos equiparables. Existe, no obstante, una diferencia notable entre ellos: la medalla Fields requiere a los premiados tener una edad inferior a los cuarenta años, mientras que el premio Abel es el reconocimiento al trabajo de toda una vida. Una leyenda urbana (al parecer no muy bien fundada), atribuye la exclusión de las Matemáticas en el elenco de los Nobel a una supuesta enemistad entre dos suecos notables: el químico Alfred Nobel y el matemático Gösta Mittag-Leffler. En su versión más retorcida, o quizás más glamurosa, remitía a la rivalidad que sostuvieron ambos personajes por el amor y el favor de una bella dama, cuya predilección por el apuesto Mittag-Leffler habría provocado el desdén de Alfred Nobel por todo lo relacionado con las Matemáticas. No obstante, varios autores, entre los que cabe citar al matemático sueco Lars Hörmander, se han ocupado de investigar los pormenores de esa leyenda, juzgándola falsa por cuanto, entre otras razones, no parece que Nobel y Mittag-Leffler tuvieran muchas oportunidades de llegar a conocerse. Pero, claro está, eso no obsta para que la historia haya gozado de cierta popularidad en la comunidad matemática.

El otro personaje de la trama es el francés Évariste Galois (1811-1832), cuyo retrato tanto se parece al de Abel por la juventud de ambos y por el atuendo común de petimetre romántico. Su corta vida transcurrió también en los tiempos políticamente convulsos de la abdicación de Carlos y la entronización de Luis Felipe I de Francia. Galois intentó en un par de ocasiones, sin éxito, ser admitido en la prestigiosa École Polytechnique, aunque sí lo consiguió en la École Normale Superiéure, pero de esta fue luego expulsado por razones políticas. También, como Abel, tuvo problemas para que los académicos apreciaran sus resultados: su manuscrito fue rechazado y denegada su publicación por la Académie des Sciences. Según el informe de Dennis Poisson, en el trabajo de Galois, «los argumentos no están suficientemente claros ni desarrollados, por lo que no nos permiten juzgar su validez». Es de sobra conocido que Galois murió como consecuencia de un duelo por culpa de una coqueta, según la carta que escribió a uno de sus amigos. Duelo del que sabía no tener muchas opciones de salir vencedor, por lo que se pasó la noche anterior poniendo en orden y redactando sus ideas matemáticas, entre las que intercaló aquello de «no tengo tiempo, no tengo tiempo», y produciendo un manuscrito que, como hemos señalado antes, revolucionó las matemáticas al poner el énfasis en la noción de *grupo de transformaciones,* y caracterizar la solubilidad de una ecuación polinómica en términos del grupo asociado de permutaciones de sus raíces, llamado ahora «grupo de Galois».

Considerando esta historia con cierta perspectiva, resulta evidente el interés del problema. Pero si de lo que realmente se tratara es de obtener las raíces de un polinomio, consiguiendo sus desarrollos decimales hasta el orden que necesitemos, entonces todo cambia porque, al menos desde Newton, se sabe cómo hacerlo con un proceso iterativo que vale para cualquier grado y que ahora puede ser programado con sencillez en cualquier calculadora. Haber puesto el énfasis en encontrar fórmulas explícitas, «a la babilonio», podría pues ser considerado un auténtico fiasco. Sin embargo, ocurre todo lo contrario: ese empeño nos deparó no solamente una colección de historias pintorescas y fascinantes, sino también la teoría de Galois, el interés por el estudio de las estructuras algebraicas y, ¡quién lo iba a prever!, desentrañar el comportamiento de las partículas elementales.

Don Quijote, historia de un caminante

Durante el año académico 1968-69, mi promoción se hallaba en el tercero de los cinco cursos de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Fue un año muy movido, ya que, bajo el estado de excepción que había declarado el gobierno franquista, la policía patrullaba dentro de los edificios universitarios. En una ocasión el catedrático director del Departamento de Álgebra y Geometría hizo llamar a la policía para que detuviera a unos alumnos que protestaban, cantando la tabla de multiplicar, de los contenidos de su curso que estaba exclusivamente dedicado a la Teoría de Categorías. Le secundaron, bloqueando las puertas del aula para que no pudiera escaparse nadie, dos profesores ayudantes que eran a su vez estudiantes de doctorado de ese catedrático de Geometría Algebraica, y que solían acompañarle asistiendo a sus clases de licenciatura. Fue el año de los movimientos revolucionarios del mayo francés, de la invasión de los tanques soviéticos poniendo fin a la llamada Primavera de Praga, y también de las numerosas manifestaciones en contra de la guerra de Vietnam.


A. Grothendieck (1928-)

Entre mis compañeros más conspicuos se admiraba a la figura de Laurent Schwartz, por sus posiciones de izquierda y por ser miembro activo del Comité de Bertrand Russell contra los crímenes de aquella guerra. Esa simpatía contribuyó a que formásemos un «Club de estudiosos de la teoría de distribuciones y de los espacios vectoriales topológicos», en donde nos encontramos, quizá por primera vez, con la obra de Alexander Grothendieck. Curiosamente fue también el matemático de moda para quienes, quizá un poco después, nos interesamos por la geometría algebraica y nos afanamos en desentrañar sus novedosas ideas aparecidas en unos cuadernos estudiados en aquellos tiempos con auténtica veneración. Creo, sin embargo, que la mayoría desconocíamos que Grothendieck, uno de los matemáticos más creativos del siglo XX, estaba por entonces cuestionándose muy seriamente su labor como investigador, seguramente influido por todos esos acontecimientos que hemos mencionado y acaso también por su propia biografía. Lo que le llevó a dimitir de su puesto en el Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette, París), quemar gran parte de sus escritos y, finalmente, perderse en algún lugar de los Pirineos donde se cree que reside desde 1991, sin que nadie entre sus allegados conozca su paradero.

En la obra de Omar Jayyam pudimos apreciar cómo la representación geométrica del problema ayudó a resolver la cúbica; luego vino Descartes, quien precisó y popularizó la idea de las ahora llamadas *coordenadas cartesianas*, que permiten transcribir problemas algebraicos en otros geométricos. Pero también puede recorrerse el camino inverso: describir las propiedades de curvas, superficies o variedades, lugares donde se encuentran los ceros de un sistema de ecuaciones polinómicas de varias variables, en términos de objetos algebraicos asociados a esos polinomios. El resultado es una rama muy importante de las matemáticas, la geometría analítica o, quizá mejor, geometría algebraica, que enseguida se fecundó con las ideas proyectivas generadas por los pintores del Renacimiento. Ocurre que muchos problemas aritméticos, por ejemplo determinar las ternas pitagóricas o el «último teorema de Fermat», pueden también ser enunciados geométricamente, pues tratan de encontrar puntos de coordenadas enteras o racionales en determinadas variedades. De manera que toda la maquinaria algebraica estructuralista iniciada por Galois, grupos de transformaciones, cuerpos de números, anillos de enteros algebraicos o («números») ideales, pudo aplicarse y asociarse con el estudio de las variedades. Pero estas líneas no pueden hacer justicia a los resultados de esa magnífica interacción que ha desempeñado un papel decisivo en la solución de problemas míticos, tales como el tantas veces citado «último teorema de Fermat» (Andrew Wiles), la conjetura de Mordell (Gerd Faltings), o las conjeturas de Weil sobre los ceros de la función zeta de Riemann en cuerpos finitos (Pierre Deligne).

Desde finales de los años cincuenta, y toda la década prodigiosa de los sesenta del pasado siglo, Alexander Grothendieck desarrolló un proyecto ambicioso consistente en reescribir toda la geometría algebraica en unos cuadernos titulados *Éléments de géométrie algébrique*. Un concepto fundamental de esta teoría es el de *esquema*, que generaliza la noción de *variedad* y que está inspirado en las propiedades de los anillos locales de funciones racionales en variedades algebraicas, pero que permite a los iniciados una bella unificación de las distintas nociones de espacio, de las variedades algebraicas, de las diferenciables de las que hablaba Élie Cartan, o las afines a trozos que mencionamos con los cubistas, a través de las nociones más algebraicas de anillo local, o de la llamada «topología de Zariski». En la obra de Grothendieck encontramos también otras muchas generalizaciones como son los *topos,* los *motivos* y los *haces*. Si en los *Cuadernos* de Ramanujan encontramos el gusto por el ejemplo significativo, en los de Grothendieck hallamos algo muy distinto: la creencia de que la mejor manera de resolver los problemas concretos consiste en observarlos desde una perspectiva lo más general posible, rodearlos de una teoría en la que acaben siendo simples corolarios de teoremas de una extrema generalidad.

Son puntos de vista opuestos y distantes que en manos de mentes menos geniales pueden producir, y producen, cantidad de observaciones pintorescas, y a menudo irrelevantes, sobre los números, por un lado; o artículos con construcciones a las que resulta difícil encontrarles una realización concreta, por el otro. Sin embargo, Grothendieck conocía perfectamente el alcance de su programa, e incluso el número, trece, de capítulos de sus *Éléments*, de los que solamente escribió los cuatro primeros, que constan de unas dos mil páginas. Empero, en varias conferencias y seminarios dio a conocer lo que escribiría en los capítulos subsecuentes y cómo, al final, servirían para demostrar la «hipótesis de Riemann» en variedades algebraicas sobre cuerpos finitos. Pero eso lo consiguió Pierre Deligne, siguiendo las ideas de Grothendieck, por lo que recibió la Medalla Fields en el Congreso Internacional celebrado en Helsinki, en el año 1978. Se trata de una historia que, de alguna manera, pareció perturbar a Grothendieck (quien a su vez, ya había sido galardonado con la Medalla Fields en el año 1966 por sus importantes contribuciones), y quizás fuera una de las razones por las que renunció al sustancioso Premio Crafoord que le fue otorgado, algunos años después, *ex aequo* con su antiguo discípulo Deligne.

Aunque su obra me interesó mucho durante mis últimos años de estudiante de la licenciatura en Madrid, luego en Chicago me pasé al otro extremo y me doctoré con una tesis sobre el *Análisis armónico en dimensión dos* y *el problema de Kakeya,* que es una interesante y básica pregunta en teoría de la medida. Fue mucho más tarde cuando llegué a saber que Grothendieck había realizado el camino opuesto, pues su primer interés matemático consistió en desarrollar por su propia cuenta la teoría de la medida, que después supo que ya había llevado a cabo Henri Lebesgue. También supe que consiguió una beca para hacer el doctorado en París y que allí le recomendaron a Laurent Schwartz, quien dirigió su tesis y sus primeros e importantes trabajos en espacios vectoriales topológicos. No he tenido la oportunidad de conocer personalmente a Grothendieck ni de asistir a ninguno de sus seminarios, pero sí a Laurent Schwartz, un héroe de mi juventud: durante una de mis estancias en la École Polytechnique, mi amigo Yves Meyer, que era entonces profesor allí, me sirvió de introductor y tuve el privilegio de charlar un buen rato con Schwartz. También he conocido a Deligne en mis múltiples visitas a Princeton, he asistido a alguno de sus seminarios sobre *motives* y compartido lectura de prensa en la sala común del Institute for Advanced Study. En la fiesta de Halloween de 1989 se presentó en mi apartamento de Einstein Drive, vestido de polichinela, acompañando a sus hijos pequeños, también vestidos de brujas y trasgos para la ocasión y amenazando con el tradicional *trick or treat*. No fue el único Medalla Fields que me visitó aquella noche, y eso, creo yo, es una muestra de la grandeza de aquel sitio para quienes nos dedicamos a las matemáticas.

Quien esté interesando en la biografía de Alexander Grothendieck puede ahora encontrar en internet abundantes pistas. En particular, *Promenade à travers une oeuvre ou l´enfant et la mère,* que es un manuscrito del propio Alexander escrito en 1986; *Correspondence Grothendieck-Serre* y *A mad day´s work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich, the evolution of concepts of space and symmetry*, de Pierre Cartier, publicados ambos por la American Mathematical Society en 2003 y 2001, respectivamente. No obstante, el siguiente es un muy somero resumen: nació en Berlín el 28 de marzo de 1928 y sus padres fueron Alexander Shapiro y Johanna Grothendieck. El padre creció en el seno de una familia judía ortodoxa, se hizo anarquista y participó en la malograda revolución de 1905 contra el gobierno zarista; tenía solo dieciséis años y fue confinado en Siberia durante otros diez. Luego participó en la revolución de 1917, pero tuvo que escapar de la URSS, cambiar su nombre y emigrar primero a Alemania y luego a Bélgica y Francia. La madre, Johanna, nació en Hamburgo y trabajó de redactora en pequeños periódicos. Todavía muy joven abandonó esa ciudad y se trasladó a Berlín, donde conoció a Shapiro. Durante sus cinco primeros años de existencia, Alexander vivió con sus padres en Berlín, pero la llegada del nazismo en 1933 hizo cambiar dramáticamente la situación familiar, por cuanto el padre estaba fichado como activo anarquista y se veía obligado a vivir con nombre y documentos falsos. Tuvo que exiliarse en París, a donde le siguió su mujer al cabo de unos meses, quedando Alexander en Berlín al cuidado de una familia de acogida.

En 1936, los padres de Grothendieck, siguiendo sus convicciones anarquistas, se trasladaron a España para unirse al ejército republicano y combatir el levantamiento franquista. Pero todos sabemos cómo acabó aquella historia, así es que ambos volvieron a Francia, cruzando los Pirineos junto a los restos del ejército, derrotados y desmoralizados. En 1939, poco antes del inicio de la Segunda Guerra Mundial, la familia de acogida se dio cuenta del peligro que representaba mantener en Berlín a un niño que tenía facciones judías tan pronunciadas. De manera que Alexander acabó reuniéndose con sus padres en París. Durante un breve tiempo, porque al poco el padre fue arrestado y enviado a un campo de refugiados, del que luego fue deportado a Auschwitz, donde murió. En 1940 Grothendieck y su madre fueron enviados al campo de refugiados de Rieucros, una región agrícola del sur de Francia, donde lograron sobrevivir hasta el final de la guerra.

Después de sus estudios en la Universidad de Montpellier y del doctorado con Laurent Schwartz, Grothendieck contactó en París con los integrantes del grupo Bourbaki, en cuya aventura estructuralista de escribir rigurosamente las Matemáticas participó durante algunos años, aunque luego se desvinculó por discrepancias con las líneas adoptadas por el grupo. El no poseer la nacionalidad francesa, de hecho ha sido toda su vida un apátrida, le impedía obtener un puesto estable en la universidad de ese país, por lo que durante algunos años ejerció en São Paulo, Brasil, y en Chicago y Rutgers, USA. No obstante, en el año 1957, un hombre de negocios francés que estaba muy interesado en la ciencia decidió emular al prestigioso Institute for Advanced Study de Princeton creando, cerca de París, un centro de investigación que pasó a denominarse Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES). Al poco de ser inaugurado, le ofrecieron uno de sus puestos a Alexander Grothendieck, quien se incorporó en 1961 y desarrolló allí las ideas que revolucionaron la geometría algebraica. Durante unos cuantos años Grothendieck fue el buque insignia de esa institución, viéndose rodeado de muchos brillantes matemáticos que se beneficiaban de las ideas y problemas abiertos que Alexander compartía y distribuía generosamente.

Pero los sucesos del 68 que hemos mencionado antes tuvieron un profundo efecto en Grothendieck, quien viajó a Vietnam para protestar por la guerra y empezó a tomar parte en manifestaciones y

A. Grothendieck en Vietnam

actos políticos en defensa de la paz. En el año 1970 supo que el IHES recibía dineros de fuentes militares, lo que le pareció intolerable, y sobre lo que protestó, tratando sin éxito que fueran rechazadas ese tipo de subvenciones. La situación fue para él insostenible, por lo que renunció a su cátedra. El resto es una lamentable historia de desencuentros con las instituciones educativas francesas que culminaron con su desaparición en algún lugar de los Pirineos; su pérdida de interés por la investigación matemática; su dedicación quijotesca a la política y a los problemas medioambientales; la constatación de que la brillantez matemática no implica la capacidad de convencer a los demás para mejorar el mundo, lo que parece ser que le produjo una cierta depresión, melancolía y la decisión de cortar todos los contactos con la comunidad académica. De vez en cuando la prensa se hace eco de los intentos realizados para descubrir su paradero y hablar con él, entre los que ha habido alguno de un grupo de algebristas madrileños, pero ninguno parece haber tenido éxito.

No cabe duda de que la peripecia vital y científica de Alexander Grothendieck, al que cabría añadir sus amores e hijos habidos con varias de sus mujeres, es un capítulo de la historia de las matemáticas que contiene amplias dosis de romanticismo. Aunque como matemáticos lamentemos el alejamiento de una mente tan poderosa y preclara, me parece que su actitud ante la financiación militar, la «contaminación» de la investigación con los asuntos de la guerra y la explotación humana, llevada a cabo con tanta consistencia y coste personal, merece todo nuestro respeto y consideración. Y una reflexión profunda sobre el papel que desempeña la ciencia en general, y las matemáticas en particular, en la construcción de armamento, en el diseño de algoritmos que, unas veces salvan vidas, como vimos en el TAC y en el proceso de imágenes médicas, pero otras ayudan a quienes desean destruirlas, señalando con precisión dónde lanzar sus proyectiles. O ayudando a los especuladores en esta economía global, de mercados de derivados y opciones financieras, en parte basadas en algoritmos (Black-Scholes, ecuación del calor, problemas de frontera libre, análisis del riesgo,…) en los que las matemáticas puedan ser mal utilizadas y servir, creando versiones más o menos sofisticadas del timo piramidal, para que los ciudadanos pongan sus ahorros en manos de aquellos mismos sinvergüenzas que solo aspiran a enriquecerse dañando irreversiblemente el medio ambiente y arruinando a la mayoría.

Grothendieck ha expresado también opiniones muy críticas sobre determinados comportamientos académicos. Pero ahí tenemos a Gregori Perelman, quizás el último romántico, quien después de alcanzar la fama con la demostración de la conjetura de Poincaré, y de la más profunda conjetura de geometrización de William Thurston, ha renunciado a las muchas y sustanciosas ofertas de universidades muy importantes, así como a la Medalla Fields que le otorgó el Congreso Internacional de Matemáticas del año 2006, celebrado en Madrid y al que rehusó asistir, y al millón de dólares que la Fundación Clay otorgaba a quien resolviese esas cuestiones. Por lo que se cuenta, Perelman ha dejado las matemáticas y vive modestamente con su madre en San Petersburgo, pero antes realizó declaraciones muy críticas y dolidas con el colectivo matemático, que aparentemente le ninguneó al principio, mientras que después alguno de sus más conspicuos miembros tratara de apropiarse de sus resultados.

Como el de los poetas, también el universo de muchos matemáticos resulta a veces algo reducido y tienden a atribuirse las mayores virtudes o los peores defectos. Creo, no obstante, que constituye un colectivo lo suficientemente amplio para que haya de todo: mejores, peores y mediopensionistas. Y no me parece, de ninguna manera, que haya que buscar en él a los auténticos villanos y explotadores de este mundo. A lo largo de mi carrera he tenido, afortunadamente, la ocasión de conocer y compartir trabajo y experiencia con muchas mentes generosas y bellas. Pero, en honor a la verdad, hay que darle algo de razón a Gregori Perelman y reconocer que también se dan entre los matemáticos algunos caracteres vanidosos y mezquinos, capaces de casi cualquier cosa con tal de conseguir sus pequeños objetivos.

El Congreso Internacional del año 2006 fue un éxito de la por entonces reconstituida Real Sociedad Matemática Española. Fui testigo de cómo el impulso inicial, la elaboración del proyecto, y el establecimiento de los contactos previos que culminaron con la designación de la sede de Madrid, llevada a cabo en el anterior congreso celebrado en Beijing en el año 2002, fueron orquestados por un catedrático de Análisis Matemático que realizó un trabajo muy efectivo y valioso. Sin embargo, una vez conseguida la designación, fue apartado de la dirección por un grupo agresivo que se hizo con el control de toda la organización, ante la pasividad de la mayoría. Con ocasión de esos, y otros congresos, se filtran a menudo informaciones sobre las presiones que reciben los comités de selección de oradores y de las tensiones para que haya de tal o cual nacionalidad. Aunque, curiosamente, no parece que eso se aplique a los españoles, o al menos así lo muestra el chascarrillo que circula entre los matemáticos del mundo: la mejor manera de eliminar a un español de ser seleccionado para una conferencia, premio, u obtención de un proyecto europeo… es poner a otro español en el comité de selección.

7.
Un centauro contemporáneo: matemático + computador

Hay 10 clases de individuos:
quienes conocen el sistema binario, y quienes lo ignoran
Leibniz
Apócrifo.

¿Qué no hubiesen dado Arquímedes, Newton o Gauss por poseer un computador de los que ahora disponemos? La ciencia griega del período clásico tuvo su primera crisis conocida con el descubrimiento de las magnitudes irracionales, pero ya en la época alejandrina Arquímedes supo cómo tratarlas y calculó las primeras cifras decimales del número π (3,1415…) basándose en una fórmula recursiva que relaciona entre sí los perímetros de los polígonos regulares de n y $2n$ lados inscritos en una circunferencia de radio unidad. Ahora una sencilla calculadora de bolsillo nos permite fácilmente añadir otras cifras a ese desarrollo aplicando la misma fórmula de Arquímedes. Con la ayuda de ordenadores potentes, y con algoritmos más sofisticados, se han logrado calcular cientos de miles de millones de cifras decimales de π, aunque eso no quita ningún mérito a la proeza de Arquímedes, quien hizo sus cálculos «a la griega», sin computadores, y sin nuestro eficiente y cómodo sistema decimal de numeración.

Si con permiso de Newton avanzamos unos cuantos siglos, nos encontraremos con Gauss (1777-1855), «*Princeps mathematicorum*», cuyas contribuciones son fundamentales en tantas áreas de las matemáticas y de la física. Gauss era un magnífico calculador que llevó a cabo complicadas cuentas astronómicas y que solía también acumular una ingente cantidad de datos antes de formular sus conjeturas. Con sus tablas de números primos menores que tres millones observó que la densidad de estos en la sucesión de los números enteros positivos decae como el inverso del logaritmo, que es decir como el inverso del número de cifras. De esa manera conjeturó el teorema de los números primos, que fue demostrado rigurosamente unos setenta años más tarde por Hadamard y De la Vallée-Poussin.

Al hilo de la pregunta con la que iniciamos este capítulo, podríamos legítimamente especular con la cantidad de conjeturas y problemas interesantes que esos tres genios habrían descubierto de haber contado con uno de nuestros modernos computadores. Pero sirva al menos esta divagación para dejar constancia de una de las más genuinas interacciones, aunque no la única y quizás tampoco la más profunda, que se dan entre los computadores y las matemáticas: los matemáticos hacen uso de los ordenadores para obtener «datos experimentales» en los que encontrar patrones, simetrías y recurrencias que permitan formular conjeturas plausibles y señalar caminos por donde avanzar. También los utilizan para realizar cálculos muy complejos, tales como los que son necesarios para describir las trayectorias de un sistema dinámico; dibujar geometrías extrañas; diseñar las alas de un avión; procesar los datos obtenidos por el escáner para obtener imágenes nítidas de los tejidos, o para analizar el riesgo financiero. Son estos algunos ejemplos que muestran el papel que el binomio matemático + ordenador desempeña en la tecnología moderna e, incluso, en nuestra vida cotidiana.

Hay dos demostraciones recientes basadas en el ordenador que son especialmente notables: se trata de la prueba del teorema de los cuatro colores, obtenida por Appel y Haken en 1976, y la solución de la conjetura de Kepler que se debe a Hales y fue publicada por *Annals of Mathematics* en noviembre de 2005, aunque la prueba data* del año 1998. Su notoriedad está justificada por

* Siete años de espera hasta la publicación son muchos años (lo normal es dos, a veces tres); pero este caso fue algo especial por la existencia de un programa de ordenador y por la novedad que eso suponía para una revista como Annals.

el tiempo transcurrido entre la formulación del problema y su solución (ciento cincuenta años tiene el primero y unos cuantos siglos el segundo), por tener enunciados asequibles a la mayoría de los ciudadanos, por la cantidad y calidad de los matemáticos que intentaron su demostración y, finalmente, porque esta ha necesitado, en ambos teoremas, de cálculos masivos que, uno por uno, verifican una enorme cantidad de casos cuya comprobación directa está varios órdenes de magnitud por encima de las posibilidades humanas.

¿Cuántos colores son necesarios y suficientes para colorear cualquier mapa del plano de manera que regiones conexas adyacentes tengan distinto color? ¿Cuál es la manera más eficiente de empaquetar esferas del mismo tamaño? La aparente sencillez de estas preguntas explica tanto su popularidad como el gancho que han tenido entre varias generaciones de matemáticos, no siendo una sorpresa que hayan trascendido a la opinión pública las vicisitudes de sus soluciones, que exhiben una desproporción manifiesta entre la tarea desarrollada por los métodos tradicionales de las matemáticas y la parte reservada al computador, por lo que hemos de hablar de demostraciones basadas *en*, más que ayudadas *por* el computador.

Aparte de su valor intrínseco, estos episodios han servido para estimular una interesante polémica en la que desde un principio se han manifestado diversidad de opiniones: hay quien cree que no son verdaderas demostraciones, porque involucran muchos pasos que no pueden ser verificados directamente por el cerebro humano, ya que su validez reside en algo tan elusivo como es la corrección del programa informático y la eficiencia de las máquinas que lo desarrollan; por el contrario, hay quien opina que no son menos válidas que otros tipos de pruebas y que no hay más razones para dudar de la capacidad de los computadores para hacer correctamente cálculos enormes que de la eficiencia de la mente humana para engarzar cadenas largas de razonamientos sin incurrir en error. Naturalmente han surgido programas que comprueban la validez de otros programas y, a su vez, la posibilidad de crear programas que supervisen a estos, y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un computador cometa un error inesperado? ¿Cuántas pruebas en distintos ordenadores debemos hacer para dar por válida una demostración? Son todas ellas preguntas naturales que surgen al hilo de estos resultados y a las que podemos añadir otras más tradicionales donde los ordenadores han añadido también nuevos matices: ¿las matemáticas se crean o se descubren? ¿Son una ciencia de observación, como la astronomía, o la irrupción de los computadores las hará experimentales? ¿Qué es una demostración? ¿Hay maneras objetivas de estimar la belleza y la profundidad de un razonamiento?

«Quod erat demostrandum»

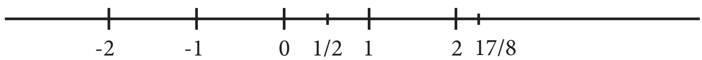
Las demostraciones matemáticas constituyen una de las más altas cimas del pensamiento humano. Hasta mediados del siglo pasado era común sostener que una prueba matemática rigurosa consiste en una cadena de razonamientos engarzados con reglas muy estrictas, que nos permite establecer conclusiones deduciéndolas de las hipótesis de partida; pero de manera tal que los eslabones puedan ser todos comprobados por cualquier persona que tenga el tiempo y el entrenamiento adecuados.

Los *Elementos* de Euclides contienen numerosos ejemplos a los que, como dijo Hardy, el paso del tiempo no ha podido añadir una sola arruga a la lozanía de su belleza y precisión. Pero la noción de demostración no ha permanecido estática a lo largo de los tiempos, sino que los matemáticos han ido creando nuevas y más poderosas estrategias, introduciendo conceptos nuevos y herramientas idóneas que nos dotan de una mayor libertad y potencia de razonamiento. La crisis del pensamiento griego a la que antes aludíamos, producida por el descubrimiento pitagórico de que longitud de la diagonal del cuadrado unidad no es un número racional, está recogida en los *Elementos* en forma de demostración: si suponemos que x, la raíz cuadrada de 2, fuese igual a la fracción irreducible a/b tendríamos la igualdad $2b^2 = a^2$, de la que deducimos la paridad del número a = $2c$ y, por tanto, la igualdad $2c^2 = b^2$ que, a su vez, exige la paridad de b y eso contradice que a y b sean primos entre sí. El principio del tercero excluido no nos deja otra salida que concluir la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2. Se trata de un razonamiento breve, sencillo, elegante e ingenioso: ¡mejor imposible!

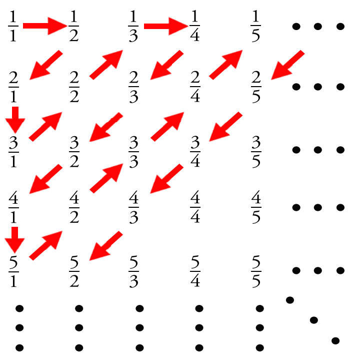
Siguiendo el rastro de la historia anterior, llegamos a finales del siglo XIX, cuando Cantor observó que los números racionales son biyectables con los naturales (son numerables o pueden ser puestos en fila de uno en uno, en estricta formación), pero que eso no es posible hacerlo con todos los números reales, racionales más irracionales. Una consecuencia inmediata es que los racionales son un conjunto pequeño, de medida nula entre los reales (si con los ojos bien cerrados escogemos un número al azar, lo más probable es que sea irracional; pero si lo hacemos con poca precaución, será un gran enigma saber si lo es o no).

Cantor, los números naturales, los racionales y los reales

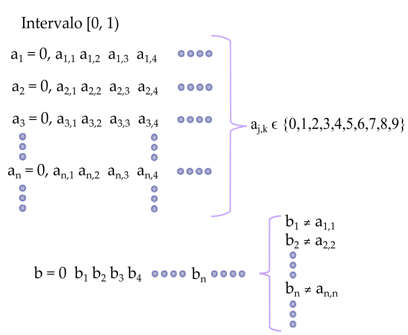
Representamos los números reales en una línea:



Cada número se puede escribir como $x = [x] + \{x\}$, donde $[x]$ es la parte entera de x (un entero); y $\{x\}$ es la parte fraccionaria de x, $0 \leq \{x\} < 1$. Los racionales son ubicuos, densos, en la recta: por pequeño que sea el intervalo (a, b) siempre contiene uno, y por tanto infinitos números racionales. A pesar de ello, pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales, como bien mostró G. Cantor.



Tratándose de todos los reales la situación cambia drásticamente. Usando los desarrollos decimales y un ingenioso método diagonal, Cantor demostró que todos los reales no pueden ponerse en fila, es decir, no son numerables:



Es decir, la hipótesis de que todos los números reales pueden ponerse en una fila ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$) es falsa porque siempre encontramos otro b que no puede estar en ella. Una consecuencia sencilla de la numerabilidad de los racionales es que forman un conjunto de medida cero en la recta real. Es decir: casi todos los números son irracionales. Sabemos, por ejemplo, que los números e y π son irracionales. Pero es una incógnita si lo son $e + \pi$ ó $e \times \pi$.

Según Alan Turing, un número es computable si podemos escribir un algoritmo, o programa de ordenador, que calcule cualquiera de sus cifras decimales: los racionales son computables, pero también lo son los números π y e. Los números nombrables son aquellos que podemos describir con un texto finito, usando un lenguaje de un número finito de símbolos (los caracteres de nuestro idioma: español, inglés, java, fortran, lisp, etc.). En particular los computables son nombrables, aunque no recíprocamente, pero eso implica una cierta sutileza lógica. Una consecuencia de la teoría de Cantor es que el conjunto de los programas, y por tanto el de los números nombrables, es numerable y, por tanto, forman un conjunto de medida cero: eligiendo un número al azar tenemos una probabilidad muy alta (de hecho igual a 1) de que no sea nombrable. Pero nadie puede señalar uno de ellos, porque señalarlo, nombrarlo o identificarlo, sería equivalente a redactar un texto que lo describiese, o un programa para calcular sus cifras decimales en el caso de los computables, y eso lo impide su propia naturaleza. Las ideas de Turing tienen otras consecuencias interesantes para los objetivos de este ensayo, pero señalemos ahora tan solo la sutileza del argumento: prueba la existencia de los números que no son nombrables observando que la probabilidad de encontrarlos en la recta real es estrictamente positiva y, al mismo tiempo, demuestra rigurosamente que nunca podremos identificar allí a uno concreto de ellos.

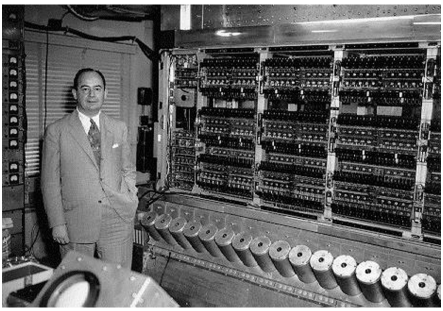
Algunas demostraciones involucran largas cadenas de razonamientos de manera indirecta y complicada. Un ejemplo es el teorema de Carleson sobre la convergencia en casi todo punto de las series de Fourier de las funciones de cuadrado integrable; otro es la prueba de Andrew Wiles del último teorema de Fermat, o la reciente demostración obtenida por Grigori Perelmann de la conjetura de Poincaré. Se trata de demostraciones que cumplen todos los requisitos del rigor, que exhiben grandes dosis de ingenio y son elegantes y bellas a su manera, pero también son enormemente complejas. Tanto, que podemos dudar de la existencia de un solo matemático que pueda verificar con detalle, por sí mismo, esas tres pruebas en un plazo prudente de tiempo. Por el contrario, las dos últimas y más recientes han necesitado del trabajo conjunto de grupos de expertos para obtener el certificado de garantía. Un tratamiento aparte merece el teorema de clasificación de los grupos finitos simples, cuya demostración se ha plasmado en más de diez mil páginas, en cientos de artículos escritos por cientos de matemáticos. No es este ensayo el lugar adecuado para glosar estos resultados, pero digamos que son importantes y fundamentales, por lo que darán lugar a muchos otros teoremas que estarán basados en ellos. Teniendo en cuenta que la probabilidad de que un error se deslice en un texto matemático extenso no es del todo despreciable, estos ejemplos sugieren varias preguntas acerca de qué es una prueba; o por qué algunas tan complejas son realmente necesarias y cuál es su verdadero interés y fiabilidad. Sobre todo al hilo de la siguiente vuelta de tuerca que ha dado este asunto con la aparición de las demostraciones basadas en, o ayudadas por, el computador; como es el caso del problema de los cuatro colores o de la conjetura de Kepler que hemos mencionado anteriormente.

Aunque existen ahora en el mercado varios paquetes de programas que llevan a cabo manipulaciones simbólicas en álgebra y en cálculo diferencial, me parece, no obstante, que todavía carecemos de «genuinos matemáticos artificiales» que puedan manejar el amplio espectro de razonamientos rigurosos que dominan los expertos de cada área. Y posiblemente nunca los tengamos, porque una cosa son las demostraciones formales y otra muy distinta son las obtenidas en asociaciones e inspiraciones insospechadas, con el rico y variable arsenal de argumentos rigurosos que la mente humana ha creado y seguirá creando. Pero no me cabe la menor duda de que el ordenador, con su enorme capacidad combinatoria, abastecido del conjunto de proposiciones conocidas y de las reglas formales de derivación de teoremas, será cada vez más capaz de colaborar, no sólo con resultados más o menos rutinarios o esperados, sino incluso aportando combinaciones nuevas que no hayan sido previstas por los humanos. Aunque el progreso en esa dirección es más arduo de lo que se pensaba hasta hace poco, habiéndose experimentado un cierto retroceso cuando se encontró un error en la demostración de la conjetura de Robbins (¿son booleanas las álgebras de Robbins?) que pareció haber llevado a cabo un programa de ordenador, pero en el que posteriormente se detectó un error que obligó a retirar el anuncio de la prueba. De haberse confirmado esta, hubiérase tratado del primer teorema demostrado por un computador que no habían sabido probar antes los artistas del área con los medios tradicionales. Pero la frustración que supuso el hallazgo de un error en el programa fue un jarro de agua fría para quienes pretenden con ahínco desarrollar la llamada «inteligencia artificial fuerte».

No obstante, el extraordinario crecimiento de la informática experimentado durante la segunda mitad del pasado siglo, que ha sido desde sus comienzos estimulado por las matemáticas pero a las que luego ha servido de maneras diversas, sugiere muchas preguntas: ¿podrán en el futuro los ordenadores hacer conjeturas interesantes y probar teoremas? ¿Somos los matemáticos una especie en extinción? ¿Estarán las matemáticas del mañana plagadas de demostraciones que dependen de cálculos que sólo pueden hacer las computadoras? ¿Tendremos textos matemáticos llenos de enunciados que afirmen que bajo tales hipótesis, que sabemos ciertas con una probabilidad mayor que 99%, podemos demostrar que otra proposición es cierta con un error experimental del 1%? ¿Convertirán los ordenadores en ciencia experimental a las matemáticas? ¿Podremos abordar matemáticamente los modelos más complejos de la ciencia? ¿Servirán los programas de ordenador para liberar a los matemáticos de las tareas más rutinarias y poder concentrarse en los pasos realmente difíciles y creativos, inasequibles a los ordenadores? ¿Aceptar la ayuda del ordenador es el típico pacto con el diablo, con el que ganamos un inmenso poder pero perdemos la noción de verdad? Habida cuenta de la enorme capacidad de la especie humana para encontrar incentivos económicos y motivos de querella, hay ya también quien se ha preguntado si llegará el día en el que un tribunal de justicia tendrá que decidir sobre la validez y corrección de una prueba matemática.

Lógicas consecuencias

Si parafraseando el famoso discurso de J.F. Kennedy cambiamos el sentido de la pregunta, y nos interrogamos ahora sobre qué han hecho los matemáticos por los computadores, la respuesta es mucho más sencilla: casi todo. Un hito es el trabajo de Alan Turing, que ya ha sido mencionado antes y en el que se aborda el significado del término *computable*. Con ese fin, Turing describe un ordenador virtual, o máquina de Turing, que es el primer diseño teórico de lo que ahora entendemos por un computador. Luego, John von Neumann colaboró decisivamente en el proyecto ENIAC con el objetivo de construir efectivamente una tal máquina, ante el escepticismo de sus colegas físicos y matemáticos del *Institute for Advanced Study* de Princeton, según he oído contar muchas veces durante mis estancias en aquel lugar.



John von Neuman (1903-1957) y el ENIAC

En 1945, von Neumann reunió en el IAS a un pequeño grupo de científicos e ingenieros con el propósito de diseñar y construir la máquina ensoñada por Turing, en la forma de un computador electrónico de una capacidad de cinco kilobytes y que podía pasar en veinticuatro microsegundos de una a otra unidad de su memoria. De hecho, los términos *bit* (que es una contracción de *binary digit*), y *byte* (colección de bits), fueron acuñados por uno de los miembros del grupo, el estadístico John W. Tukey, que se había unido al proyecto de von Neumann. El computador del IAS constaba de una memoria ubicada en cuarenta válvulas, cuyas direcciones estaban asignadas de la misma manera en la que un conserje de hotel manipularía, al mismo tiempo, los números de las habitaciones de cuarenta huéspedes en un hotel que dispone de cuarenta de ellas. Los códigos de este universo usaban coordenadas en forma de parejas de 5-bits ($2^5 = 32$), para identificar unívocamente una de los 1024 lugares de memoria que contiene una secuencia (o frase) de 40 bits. En solo veinticuatro microsegundos se extraía una frase de 40 bits que podía incluir datos (números que designan cosas), pero también instrucciones (números que hacen tareas), que pueden modificar otras preexistentes, o bien enviarnos a otro lugar de la memoria para seguir las instrucciones que allí se hallen. De manera que si a partir de un código de 10-bits la máquina generaba un retorno de 40 bits, se producía, iterándolo, una especie de reacción en cadena que permitía a la máquina, junto al mecanismo RAM *(Random Access Memory),* acceder al poder del mundo de los números y, recíprocamente, convertirse en vehículo para que los algoritmos numéricos pudiesen implementarse y llevar a cabo complicados cálculos. El descubrimiento de los transistores primero, y de los circuitos integrados después, ha permitido multiplicar la potencia de cálculo de los ordenadores hasta extremos que John von Neumann y Alan Turing no pudieron predecir, pero su obra hizo que nuestro mundo no volviese a ser el mismo.

Ambos, Turing y von Neumann, participaban en el programa formalista de Hilbert, que era el intento más serio de salvar los muebles después del demoledor impacto que la aparición de las antinomias o paradojas había tenido en los planes de Frege y Cantor, entre otros, de fundamentar rigurosamente las matemáticas en la teoría de conjuntos. Según Hilbert, en un lenguaje formal tenemos un alfabeto, unos signos ortográficos (paréntesis, punto, coma, espacio en blanco, etc.), unos conectivos lógicos (*y, o,* negación, implicación, *igual*) y unos cuantificadores (*existe, para todo*). Con ellos se pueden escribir fórmulas siguiendo unas reglas estrictas de construcción. Algunas de estas fórmulas bien hechas son elegidas como los axiomas de la teoría, a la que también hay que dotar de unas reglas de inferencia que permitan obtener unas fórmulas de otras. Una demostración formal es una sucesión finita de tales fórmulas de manera que cada una de ellas ora es un axioma, ya se deduce de las anteriores aplicando las reglas de inferencia. La última obtenida es el teorema cuya demostración consiste exactamente en esa misma sucesión de fórmulas. Observemos lo revolucionario que este punto de vista resultaba en sus comienzos y, sin embargo, lo natural que ahora nos parece por su semejanza con los mecanismos de los lenguajes de programación con los que estamos familiarizados.

Siguiendo el plan de Hilbert, se introdujo el sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel como la base sólida sobre la que construir la teoría de conjuntos, y luego el resto de las matemáticas, evitando las antinomias de Russell y Cantor. Pero, ¿es consistente o está exento de contradicciones? ¿Es completo en el sentido de que siempre sea demostrable la verdad o la falsedad de una proposición? Kurt Gödel encontró la respuesta a estas naturales preguntas con su famoso teorema de *incompletitud* que, *lasciate ogni speranza,* resultó ser demoledor para el proyecto formalista: cualquier teoría axiomática, lo suficientemente rica para que podamos desarrollar la aritmética dentro de ella, contendrá siempre proposiciones indecidibles.

Una cuestión fundamental que plantean las máquinas de Turing es el llamado «problema de la parada». Dado un programa bien construido, aceptado por el compilador, puede ocurrir que, transcurrido un cierto tiempo, la máquina se detenga y nosotros obtengamos la respuesta que deseábamos. Pero puede suceder lo contrario y que la máquina prosiga *ad infinitum.* De hecho, no es nada difícil imaginar programas aritméticos en los que se den cada una de estas dos opciones. El problema de la parada consiste en diseñar un algoritmo que decida *a priori,* en tiempo finito, si los programas van o no van a detenerse. Turing demostró rigurosamente que no puede existir ese algoritmo y que ello es equivalente al teorema de *incompletitud* de Gödel. Los trabajos de Gödel y de Turing constituyen una magnífica etapa de la lógica matemática del pasado siglo, a la que estas líneas no pueden, ni mucho menos, hacer justicia. Pero sí podemos constatar, una vez más, la influencia decisiva que sus teorías tuvieron en el nacimiento y evolución de los lenguajes de programación y en el diseño de los primeros ordenadores.

Las demostraciones formales del programa de Hilbert son pues muy distintas de las que normalmente se publican en las revistas matemáticas (salvo quizás las especializadas en lógica). Estas suelen ser pruebas rigurosas basadas en implicaciones comprobadas, resultados previos y asociaciones de ideas que los expertos del área conocen y manejan con precisión. Convertirlas en pruebas formales sería un proceso largo y tedioso que, excepto en casos muy simples, nunca ha sido llevado a cabo. Pero me parece que las diferencias que hay entre ambas son un punto importante a la hora de comprender lo que puede realizar un matemático, lo que hace un computador y qué posibilidades nuevas tiene el centauro matemático + computador, al menos cuando restringimos su horizonte a la demostración de nuevos teoremas. Pero pensemos en el episodio de la bañera de Arquímedes, en la famosa manzana de Newton o en la inspiración que llevó a Lebesgue a crear su integral, observando la manera en la que los albañiles disponían horizontalmente los ladrillos para formar un muro y, con toda la modestia que el caso requiere, permítaseme añadir cómo la visión del baile de los dragones, en la fiesta del año nuevo de 1973 en Chinatown, Chicago, me ayudó a lograr la demostración del ahora llamado teorema maximal de Kakeya, o cuando, en otra ocasión distinta, la contemplación de un cuadro de Malévich me sugirió ideas para entender el intrincado solapamiento de los paralelepípedos del espacio. Eso, creo yo, son ejemplos de iluminaciones fecundas que los ordenadores no pueden experimentar.

En los dominios del centauro

O quizás habría que decir del *cyborg,* para ajustarnos mejor a la terminología moderna. Un asunto típico que ha dado lugar a diversas reflexiones, no siempre muy inspiradas, es el de la llamada *matemática aplicada* en contraposición a la otra, a veces denominada *matemática pura,* que debiera suponerse carente de aplicaciones. Enseguida se descubre lo falaz y artificial de tal separación, pero eso no obsta para que haya numerosos artistas que se pongan la divisa de matemático puro o aplicado, creen asociaciones con sus correspondientes revistas, se organicen para conseguir que el gobierno financie prioritariamente sus proyectos, y pugnen por el poder académico y sus prebendas, según reza el estribillo burlón: «Érase un matemático aplicado; aplicado a su propia promoción…» Pero, bromas aparte, resulta evidente el cambio experimentado por las aplicaciones de las matemáticas al resto de las ciencias, y a nuestra vida cotidiana, que han propiciado los ordenadores. También han aparecido áreas nuevas de actividad con el adjetivo computacional (álgebra computacional, geometría computacional…), o se han desarrollado teorías de análisis numérico en direcciones que adquieren su sentido por la existencia de potentes computadoras.

Por propia naturaleza, los matemáticos somos reduccionistas y nos esforzamos en demostrar y deducir desde los primeros principios, *more geométrico*, las consecuencias de los modelos de la ciencia. En ese empeño se han cosechado éxitos muy notables, siendo las teorías de la gravitación de Newton y de Einstein los mejores paradigmas, pero hay otras en las que andamos todavía estancados, como ocurre con las ecuaciones de la mecánica de los fluidos, y no es preciso invocar a Gödel para suponer que, si no vamos a poder demostrar todas las proposiciones aritméticas verdaderas, sea poco realista la empresa de reducir las teorías científicas a teoremas, especialmente en aquellas ciencias en las que haya que manejar una gran cantidad de información, como es el caso de la biología.

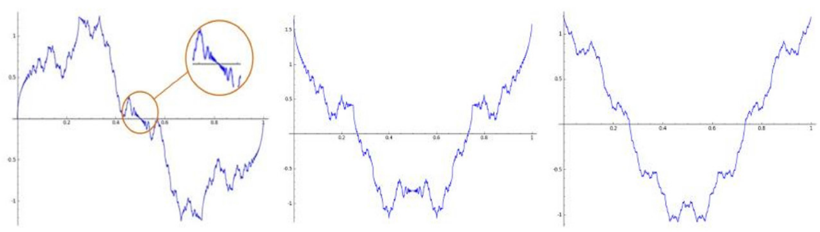
Una estrategia que ha sido utilizada con habilidad en muchas circunstancias consiste en simplificar los modelos, reduciendo la dimensión del espacio o el número de ecuaciones y funciones involucradas, para obtener un modelo «bebé» en el que puedan lograrse resultados rigurosos esperando que reflejen de alguna manera lo que ocurre en situaciones más realistas. Hasta no hace mucho esa era la única posibilidad a nuestro alcance, pero los computadores han cambiado el panorama haciendo posible abordar algunos modelos en toda su complejidad, no para demostrar teoremas sino para utilizar sofisticadas teorías matemáticas que permiten diseñar algoritmos y hacer simulaciones numéricas que, en muchos casos, sustituyen a medidas y experimentos que son muy difíciles, costosos o imposibles de realizar. Se trata de un fenómeno novedoso cuya incidencia en el devenir de la ciencia es todavía prematuro prever, pero que nos ayuda a discernir los objetivos de una genuina matemática aplicada.

Un ejemplo muy interesante lo encontramos en la teoría de los números, o aritmética superior, que hasta ayer mismo estaba considerada como la quintaesencia de la matemática pura, cuyos teoremas profundos y bellos carecían de aplicaciones prácticas. Resulta que los números primos, cuya sucesión ha fascinado a los matemáticos desde los griegos de hace más de veinte siglos, se encuentran ahora en el centro de las aplicaciones por cuanto en sus propiedades está basada la seguridad de las comunicaciones en internet. Disponer de primos muy grandes, de más de cien cifras, es fundamental para la seguridad, mientras que encontrar algoritmos rápidos de factorización es tarea de quienes desean espiar nuestras comunicaciones, y resulta que cualquiera de estos empeños sería inviable sin la ayuda del computador. Afortunadamente para la seguridad, resulta asequible a nuestros ordenadores actuales encontrar primos de cientos de cifras, o al menos que lo sean con una probabilidad muy grande, pero se trata todavía de una misión imposible para ellos descomponer, en un tiempo razonable, un número que sea producto de dos de esos primos y sobre cuyos factores no tengamos información alguna. De manera que una antigua rama de las matemáticas se ha visto revitalizada y cambiado la índole de sus problemas en contacto con las nuevas posibilidades de computación.

En una de las figuras siguientes está representada la gráfica, obtenida con la ayuda de un ordenador, de la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\left(2\pi n^2 x\right).$$

Introducida por B. Riemann, esta serie trigonométrica tiene una interesante historia relacionada con el importante problema decimonónico de saber si pudiera existir una curva continua que carezca de recta tangente en todos sus puntos.



$$F_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(2\pi n^2 x\right)}{n^2} \qquad F_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi n^2 x\right)}{n^2} \qquad F_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi n^3 x\right)}{n^3}$$

La respuesta a ese problema fue obtenida por Weierstrass, quien dio el primer ejemplo de tal función en forma de serie una trigonométrica parecida a la anterior, salvo en el importante detalle de que las frecuencias crecen geométricamente, es decir, mucho más deprisa que los cuadrados. Empero, la función de Riemann tiene interés por sí misma y siguió estudiándose en el siglo XX por G. Hardy y J. Littlewood, quienes probaron que no es derivable en los puntos irracionales, ni tampoco en diversos casos de racionales. Sin embargo, en 1960, J. Gerver, un alumno de la Universidad de Columbia, demostró que la derivada existe, y es igual a $-\pi$, en todas las fracciones irreducibles cuyo denominador sea congruente con 2 módulo 4, por ejemplo 1/2, como puede muy bien apreciarse en la figura de la izquierda.

Me parece interesante resaltar que un hecho que se escapó al análisis de matemáticos de la talla de Riemann, Weierstrass, Hardy y Littlewood sea ahora tan evidente para nosotros gracias a los magníficos dibujos que nos hace un simple ordenador personal. Estimulado por esta y otras figuras de series trigonométricas relacionadas, he logrado demostrar recientemente, en colaboración con Fernando Chamizo, que se trata de conjuntos fractales con una interesante estructura local-global de la que sabemos también calcular su dimensión.

¿Cuál es la energía del estado fundamental de un átomo? Se trata de una pregunta básica si queremos entender las reacciones químicas desde los principios de la mecánica cuántica. En la formulación de Born-Oppenheimer, un átomo consta de un núcleo de carga Z y de Z electrones cuantizados cuyo estado viene determinado por su función de ondas. La energía total del sistema, que es la cinética de los electrones más la potencial que origina la interacción coulombiana, se calcula en el modelo a partir del operador hamiltoniano. El estado fundamental es aquel que minimiza la energía, y su determinación explícita, salvo en el caso sencillo del átomo de hidrógeno, está fuera de nuestro alcance. No obstante, diversos autores, usando métodos analíticos muy potentes, han demostrado que tiene el desarrollo asintótico $E(Z)=C_1Z^{7/3}+C_2Z^2+C_3Z^{5/3}\ldots$ en potencias decrecientes del número atómico Z. El término siguiente, sin embargo, es de naturaleza oscilatoria y eso, que puede ser muy interesante en el empeño de entender el sistema periódico desde primeros principios, resulta estar íntimamente relacionado con un problema clásico de la teoría de los números: aquel que considera el orden de magnitud del error cometido al aproximar el número de puntos del retículo que hay dentro de un círculo, de radio muy grande y centrado en el origen, por el valor de su área. La estimación de ese término oscilatorio, que fue publicada en la Academia de Ciencias de Estados Unidos en el año 1994, depende de que una cierta función definida de manera implícita y complicada sea estrictamente positiva. Pero eso solo lo supimos hacer con la ayuda de un computador.

Es decir, elaboramos un programa que usa la aritmética de intervalos para «demostrar rigurosamente» que el mínimo de una función es un número estrictamente positivo.

El último ejemplo que deseo presentar es de la mecánica de fluidos, un área cuyas ecuaciones fundamentales se remontan al siglo XVIII, que ha sido un motor para el desarrollo de las matemáticas y que tiene numerosas aplicaciones a la tecnología y a la vida cotidiana; yendo desde las predicciones meteorológicas hasta el diseño de los aviones, y siendo entender la naturaleza de los fenómenos turbulentos, y prever sus consecuencias, uno de los principales objetivos de la ciencia contemporánea. Pero ocurre que el conocimiento que tenemos de las ecuaciones básicas es todavía muy incompleto. En dimensión espacial dos, que es donde disponemos de mayor información, se ha estudiado la evolución de los torbellinos, que son soluciones de las ecuaciones cuya vorticidad es constante y positiva en una región limitada, anulándose luego fuera de ella. Como la vorticidad se conserva a lo largo de las trayectorias de las partículas, resulta que el torbellino se va moviendo con el fluido, cambiando tal vez de forma pero conservando otras muchas características, de acuerdo con lo que se observa en el comportamiento de huracanes y tornados.

La evolución del torbellino equivale a la dinámica de su contorno. Haciendo uso de las ecuaciones de Euler para los fluidos incompresibles no viscosos, en la última década del siglo pasado se logró demostrar que un contorno inicial que sea una curva cerrada y lisa evolucionará manteniendo esas propiedades: sin formar esquinas o subdividirse en varios trozos inconexos. Pero hay otros modelos relevantes, como son las ecuaciones cuasigeostróficas, para las que la misma pregunta tiene interés aunque su estructura matemática las hace más difíciles de tratar. Pues bien, con la ayuda de un conjunto (*cluster*) de ordenadores, en un cálculo complejo y delicado que ha llevado varios meses de computación ininterrumpida, se han obtenido recientemente unas espléndidas imágenes que describen la danza de estos torbellinos, moviéndose con el fluido de manera tal que producen una singularidad de su contorno en un corto tiempo. El resultado (evidencia de singularidades) ha sido publicado en la Academia de Ciencias de Estados Unidos, y todavía nos mantiene muy ocupados tratando de elaborar una demostración analítica de este inesperado fenómeno que descubrimos con el ordenador.

Me parece que estos ejemplos, en cuyo análisis he participado activamente, son un testimonio fehaciente de la influencia que el computador tiene en la investigación matemática contemporánea. Quienes me conocen saben de mi torpeza con los programas de ordenador y, en general, de mis pésimas relaciones con las máquinas, por lo que, aparte de evidenciar el mérito de mis colaboradores, creo que es muy significativo, para estimar el grado de esa influencia del ordenador, el que alguien de mis características haya trabajado en varios proyectos matemáticos que lo involucran de forma tan decisiva.

Red de redes

Como ocurre en otras áreas, el correo electrónico permite mantener colaboraciones sin desplazamientos, acceder a la enorme cantidad de información que circula por la red y conseguir artículos y prepublicaciones de forma tan cómoda como rápida. También se han creado varias revistas electrónicas de matemáticas, y las «clásicas», en papel, o al menos las mejores entre ellas, tienen ahora más sentido como garantía de calidad que como vehículos de transmisión de la información, ya que la demora en la publicación ronda los dos años de media, mientras que los artículos pueden ser encontrados mucho antes en las páginas que sus autores tienen en la red.

Una mención aparte merecen los procesadores de texto, especialmente TeX y su descendiente LaTeX, que en pocos años han cambiado por completo el oficio de escribir las matemáticas, siendo muy ostensible la mejora de la calidad y el abaratamiento de la impresión de revistas y monografías, que tanto han contribuido al aumento del número de artículos que se publican. Pero ahí nos encontramos con un problema que ya mencionamos anteriormente, porque la cantidad no va necesariamente asociada a un aumento de la calidad científica, sino más bien al contrario, observándose una proliferación excesiva de artículos prescindibles e irrelevantes. El *pauca sed matura* de Gauss, vigente hasta hace muy poco, ha sido olvidado de tal manera que lo que ahora impera es publicar mucho y rápido, aunque se trate de variaciones más o menos sencillas de temas conocidos.

A esta situación han contribuido diversas causas y una empresa, con sede en la ciudad de Filadelfia, que elabora todo tipo de índices de impacto de revistas y de citas de autores que, en aras de su presunta objetividad, son luego usados para evaluar la labor de los científicos, poniéndolos en fila en sus respectivas áreas de investigación, universidades, regiones y países. Se trata de un fenómeno nuevo, propiciado por los ordenadores, que es de carácter universal, aunque en algunos lugares haya adquirido mayor virulencia que en otros. Quienes han estudiado la elaboración de esos índices han señalado lo poco significativos que resultan ser en el caso de las matemáticas, porque los grandes avances han sido casi siempre obra de individuos aislados; los trabajos tardan varios años en ser publicados y otros tantos en ser citados, aunque luego puedan serlo sin límite de tiempo; porque alguien como Andrew Wiles puede dejar de publicar durante un largo período por estar trabajando en la prueba del fermat, o porque la existencia de muchos autores en un área dada no es una garantía de que estén creando matemáticas muy interesantes. Además de presentar algunos errores de grueso calibre ocurre que, como bien aprendieron los físicos, cualquier medida perturba el experimento, y si aquella tiene en cuenta el número de citas, nos vamos a encontrar con directores de revista que «recomiendan» a los autores de un trabajo, antes de ser aceptado para su publicación, que citen a otros publicados en la misma revista, consiguiendo así subir notablemente el llamado índice de impacto. Pero también a miembros de un club de citas, vengan o no vengan a cuento, y a autores con un cierto poder académico que han de ser citados profusamente por los más jóvenes, si es que estos no quieren atenerse a las consecuencias de no hacerlo. Estas conductas se han dado y, aunque se trate solo de una minoría quienes las practican, no cabe duda de que significan un quiebro respecto a la tradición anterior que era algo más caballeresca.

Cuando los índices de impacto y el número de citas son usados para distribuir algunos complementos retributivos (los famosos sexenios en España) con un criterio amplio, no merecen mayor reparo. Lo malo es cuando se utilizan para establecer políticas científicas, financiar los proyectos de grupos grandes en detrimento de otros más pequeños, establecer líneas de prioridad o en las promociones del escalafón universitario. Entonces tenemos un problema serio y hay que decir que la única manera reconocida de evaluar la labor de un científico es a través de la importancia y la dificultad de sus resultados, que están acompañados de la originalidad de las ideas y de las técnicas que haya introducido para obtenerlos. Lo demás es ruido. Pero eso solo puede apreciarlo quien esté en condiciones de hacerlo, y ahí tenemos otro problema. Sociedades más vertebradas científicamente que la española disponen de instituciones de prestigio cuyos miembros conocen y ejercen el canon, pero nos tememos que ese no sea nuestro caso y, quizás por ello, circulan por la red escritos señalando a nuestro país como un ejemplo de uso excesivo de tales índices, tanto por los tribunales de oposición como por los mismos responsables de la política científica que los han llevado al Boletín Oficial del Estado.

Uno puede fácilmente encontrar en internet su árbol genealógico académico, su número de Erdős o saber cuántos caminos de colaboración distintos le conectan con Euler, Lagrange, Hilbert o con ese otro colega que tan mal nos cae; descubrir que esos caminos son, en general, sorprendentemente cortos y apreciar lo que ello significa acerca del oficio y las relaciones entre los matemáticos. Desde la perspectiva de este ensayo, resulta interesante resaltar cómo el tratamiento de esa enorme fuente de datos que constituyen las publicaciones científicas ha sido posible gracias a los ordenadores y a internet. Pero también que ha propiciado un cambio de estilo y de valores. Porque todavía en los años setenta del pasado siglo era considerado de mal gusto que el director firmara los artículos de las tesis de sus doctorandos; aunque circulase la leyenda de que, en muchos casos, una tesis era un trabajo del director realizado en circunstancias adversas. Tampoco se entendía que un mismo autor publicase trabajos distintos con ideas muy parecidas, siendo entonces poco común que alguien alcanzase cien publicaciones, que es un número que ahora se sobrepasa con facilidad por muchos artistas y, en general, estaban mal vistas las autocitas. Se estilaban pues otras maneras que podríamos calificar de más señoriales, había menos publicaciones y estas eran más significativas. El ordenador e internet han puesto a algunos matemáticos a mirarse los índices y a publicar como obsesos, han multiplicado la cantidad de información y han hecho su circulación mucho más asequible y rápida. Pero nos ha originado la colosal tarea de separar el grano, que es mucho, de la paja, que es inmensa.

8.
Glosa de una gran tesis: Riemann y las series trigonométricas

Un genio matemático como Riemann, podría haber previsto perfectamente los descubrimientos más profundos del mundo actual

A. S. Eddington

Bernhard Riemann, a pesar de su corta vida, está generalmente considerado como uno de los más universales, fecundos y originales creadores de todos los tiempos, ocupando, junto a los Arquímedes, Newton, Euler, Gauss, Hilbert y Poincaré, la posición más excelsa del Olimpo de las matemáticas. Su obra, al mismo tiempo clásica y revolucionaria, ha tenido, y sigue aún teniendo, una influencia profunda en muchas y variadas áreas: en geometría y en teoría de los números, por supuesto, pero también en la física y en el análisis matemático.

Si juzgamos por su tesis doctoral del año 1851 en la Universidad de Göttingen, *Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja**, o por su primera tesis de habilitación presentada en la misma Universidad tres años después y titulada *Sobre la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica***, podríamos afirmar que, al menos durante los comienzos de su carrera, Riemann era mayormente un analista.

Bernhard Riemann (1826-1966)

Cumpliendo con los requisitos de Göttingen, presentó también una segunda tesis de habilitación titulada *Sobre las hipótesis en las*

* *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.*

** *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

*que se funda la geometría**, siendo una anécdota muy conocida que Gauss, rompiendo con la tradición establecida en aquella Universidad, le pidió defender públicamente esta segunda opción, que tanta influencia ha tenido luego en el desarrollo y evolución de nuestras nociones de espacio y de estructura geométrica. Habiéndose convertido, con toda justicia, en un hito famoso de la historia de nuestra ciencia.

Pero la primera tesis, aunque sea menos popular y esté quizás un tanto oscurecida por la fama de la segunda, es también una maravilla. La preparación de este capítulo me ha brindado la oportunidad de volver a leerla con cuidado, siendo mi propósito compartir esa lectura con ustedes, a sabiendas de que mis comentarios no podrán nunca hacerle justicia, aunque consideraré un éxito que mis reflexiones puedan servir para animarles a estudiarla y aprender directamente de tan magnífica obra.

La tesis está estructurada en cuatro partes. En la primera se describen, de forma breve, pero precisa y amena, la historia y los antecedentes del problema de la representación de funciones «arbitrarias» por medio de series trigonométricas. Riemann detecta a los personajes fundamentales de la trama, a saber: D´Alembert, Euler, Bernoulli (Daniel), Lagrange, Fourier y Dirichlet. En un lenguaje muy claro nos ilustra de la cuestión en querella y de las contribuciones y puntos de vista de cada uno de esos artistas. En la parte segunda inicia su propio camino, que le conduce a la definición de la integral que ahora lleva su nombre y a la caracterización de las funciones que son integrables, presentando varios ejemplos que muestran la potencia y las limitaciones de la nueva definición. En ese empeño se demora en aclarar la diferencia entre continuidad y diferenciabilidad, ofreciéndonos los primeros ejemplos conocidos de funciones continuas que carecen de derivada en un conjunto denso de puntos, surgiendo naturalmente la pregunta: ¿habrá una función continua que no sea derivable en todos sus puntos?

* *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.*

En la tercera parte, Riemann plantea el problema de la unicidad de los desarrollos trigonométricos y resuelve su caso más básico. Pero para hacerlo se ve obligado, entre otros logros, a generalizar el concepto de *derivada segunda de una función.* Luego Cantor prosiguió este análisis, lo que le llevó a crear la teoría de conjuntos y a preguntarse sobre la existencia de un conjunto de números reales cuyo cardinal esté estrictamente contenido entre el de los naturales y el de todos los reales. Es decir, a formular la hipótesis del continuo, cuya naturaleza independiente de los otros axiomas fue dilucidada por P. Cohen en torno al año 1960. Por cierto que Cohen había realizado su tesis doctoral en la Universidad de Chicago, dirigida por A. Zygmund, y esta versó, precisamente, sobre el problema de la unicidad formulado por Riemann. Finalmente, la parte cuarta de la tesis contiene varios ejemplos que nos ilustran sobre la complejidad y la diversidad de las series trigonométricas.

A lo largo de la memoria aparece repetidamente el empeño de tratar «funciones arbitrarias» e ir más allá de lo obtenido por Dirichlet y otros autores anteriores. Para entender el contexto y la presentación histórica, conviene pues considerar el concepto de función que se tenía en los primeros escritos de Euler y Lagrange (aunque en los postreros lo modificaron un poco acercándose al actual) y su evolución hasta la época de Riemann, lo que queda patente en los textos siguientes:

> *Una cantidad constante es una cantidad determinada que mantiene permanentemente el mismo valor. Una cantidad variable es una cantidad universal o indeterminada que contiene en sí misma todos los valores determinados. Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o constantes**.

L. Euler,
Institutiones calculi differentialis (1755)

* *Quantitas constans est quantitas determinata perpetuo lunden valorem servans. Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur. Function quantitatis variabilis est expressio analytica quomodunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*

Se llama función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la que estas cantidades entren de una manera arbitraria, mezcladas o no con otras cantidades a las que se considera teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles. Así, en las funciones, no se consideran más que las cantidades que se han supuesto variables, sin tener en cuenta a las constantes que puedan aparecer allí mezcladas[*].

J. L. Lagrange,
Théorie des fonctions analytiques (1797)

Supongamos que z es una cantidad variable que puede asumir, gradualmente, todos los valores reales posibles, entonces, si a cada uno de sus valores corresponde un valor único de la cantidad indeterminada w, diremos que w es una función de z […] Esta definición no establece ninguna ley entre los distintos valores tomados por la función, con lo que si se conoce esta función en un cierto intervalo, la forma de su continuación fuera de ese intervalo sería completamente arbitraria. […] Es por tanto indiferente definir la dependencia de la cantidad w respecto de la cantidad z de una manera arbitraria o por medio de ciertas operaciones entre las cantidades involucradas[**].

B. Riemann,
Grundlagen für eine allgemeine theorie der Functionen einer veränderlichen completen Grösse (1851)

---

* *On appelle function d´une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d´une manière quelconque, mêlées ou non avec d´autres quantités qu´on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs posibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu´on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.*

** *Denkt man sich unter z eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle möglichen reellen Werthe annehmen kann, so wird, wenn jeden ihrer Werthe ein einziger Werth der unbestimmten Grösse w entspricht, w eine Function von z genannt […] Diese Definition setzt offenbar zwischen den einzelnen Werthen der Function durchaus kein Gesetz fest, indem, wenn über diese Function für ein bestimmtes Intervall verfügt ist, die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb desselben ganz del Willkür überlassen bleibt.[…] Es ist daher einerlei, ob man die Abhängigkeit der Grösse w vender Grösse z als eine willkürlich gegebene oder als eine durch bestimmte Grössenoperationen bedingte definiert.*

Parte I de la tesis: Historia de la cuestión de la representabilidad de una función arbitraria por una serie trigonométrica

Esta parte es una síntesis, ágil, clara y precisa, del estado de la cuestión que va a abordar en el resto de la memoria. El mejor comentario que podemos hacer es simplemente una selección de sus frases más significativas, junto, una vez más, a la recomendación de leerla directamente:

Las series que Fourier llama trigonométricas, es decir las series de la forma

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(nx\right)+b_n\operatorname{sen}\left(nx\right)\right),$$

desempeñan un papel importante en aquellas partes de las matemáticas en las que aparecen funciones arbitrarias. Incluso puede afirmarse con motivo que los avances más esenciales en estas partes de las matemáticas, tan importantes para la física, han sido consecuencia de un mejor conocimiento de la naturaleza de estas series. Ya en las primeras investigaciones que condujeron a la consideración de funciones arbitrarias se formuló la pregunta de si una tal función totalmente arbitraria puede ser expresada por medio de una serie como la anterior. Esto sucedió a mediados del siglo pasado, con ocasión de las investigaciones sobre las cuerdas vibrantes, en las que se ocuparon entonces los matemáticos más afamados. Sus concepciones sobre nuestro tema no pueden ser expuestas adecuadamente sin entrar en ese problema.

Riemann continúa escribiendo la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ ,$$

y presenta la solución obtenida por D´Alembert, publicada en las *Memorias* de la Academia de Berlín (1747), y que consiste en la suma de una onda progresiva $f(x-\alpha t)$ y otra regresiva $g(x+\alpha t)$. Y no tiene inconveniente en informarnos de que la solución de D´Alembert se obtiene a través del sencillo cambio de variables ($u=x-\alpha t$, $v=x+\alpha t$), ahora tan conocido:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0\ .$$

Constituye una muestra del estilo de exposición directo, pedagógico y nada pedante que encontramos en sus escritos:

Aparte de esta ecuación, que se deduce de las leyes generales del movimiento, $y(x,\ t)$ debe satisfacer todavía la condición de anularse en los puntos de sujeción de la cuerda, es decir, $y(0,\ t)=y(l,\ t)=0$.

$$\left.\begin{aligned} f(-\alpha t)+g(\alpha t)&=0\\ f(l-\alpha t)+g(l+\alpha t)&=0\end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad f(z)=-g(-z)=-g\big(l-(l+z)\big)=f(2l+z),$$

luego

$$\begin{cases} y=f(x-\alpha t)-f(-x-\alpha t)\\ \qquad f(x)=f(x+2l).\end{cases}$$

Una vez que D´Alembert hubo establecido esto para la solución general del problema, se ocupó en una continuación de su memoria de la ecuación $f(z+2l)=f(z)$; es decir, buscó expresiones analíticas que permanezcan invariantes cuando z aumenta en una cantidad $2l$.

El comentario siguiente se refiere a Euler, quien publicó también en las *Memorias* de la Academia de Berlín (1748), un artículo en el que desentraña la relación entre la función *f* de D´Alembert y los datos, posición y velocidad, que tenía la cuerda inicialmente. Pero pocos años más tarde, en 1753, y en las mismas *Memorias,* apareció una solución distinta debida a Daniel Bernoulli basada en la observación de que la función

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n \alpha t}{l}\right),$$

donde *n* es un entero, verifica la ecuación y las mencionadas condiciones de contorno: $y(0, t) = y(l, t) = 0$.

Sobre esta base explicó el hecho físico de que una cuerda pueda dar, además de su tono fundamental, también el tono fundamental de una cuerda de igual constitución pero de longitud $l/2$, $l/3$, $l/4$,… y consideró que su solución particular era general.

La observación de que una cuerda pueda dar sus diferentes tonos simultáneamente llevó a Bernoulli a considerar que la cuerda (según la teoría) también podría vibrar de acuerdo con la ecuación:

$$y = \sum_n c_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n \alpha}{l}\left(t - \beta_n\right)\right)$$

Y como todas las modificaciones observadas del fenómeno se podían explicar partiendo de esta ecuación, la consideró como la más general.

La polémica suscitada está bien descrita en la tesis y en ella terciaron, además de D´Alembert y Bernoulli, también Euler y Lagrange, entre otros. ¿Es posible representar una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica? D´Alembert lo negaba, mientras que Bernoulli creía que sí. Riemann lleva a cabo un análisis de las publicaciones de Euler y de Lagrange para concluir que estos dos grandes matemáticos de la Ilustración daban más la razón al primero que al segundo, al menos en el caso de las funciones arbitrarias, puesto que para las analíticas, o analíticas a trozos, Lagrange manifestó algunas dudas.

En el párrafo 2 de esta primera parte aparece Joseph Fourier, a quien Riemann rinde tributo en los términos siguientes:

> Transcurrieron casi cincuenta años sin que se lograra ningún avance esencial en la cuestión de la representabilidad analítica de las funciones arbitrarias. Entonces, una consideración de Fourier arrojó nueva luz sobre este tema. Fourier indicó que en la serie trigonométrica
>
> $$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right),$$
>
> los coeficientes pueden ser determinados mediante las fórmulas
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx.$$

El siguiente personaje destacado por Riemann es su maestro Gustav Lejeune Dirichlet, quien antes de ser profesor en Göttingen había estudiado con Fourier y con Poisson en la Universidad de París:

> Solo en enero de 1829 apareció en el *Journal de Crelle* una memoria de Dirichlet donde la cuestión de la representabilidad mediante series trigonométricas se decidía con todo rigor para el caso de funciones que admiten integración en todo el recorrido y que no tienen una cantidad infinita de máximos y mínimos.

Resulta enternecedor leer hoy los comentarios del gran Riemann acerca de la diferencia radical entre las convergencias absoluta y condicional de las series, pero que, sin duda alguna, era uno de los puntos claves de la cuestión dilucidada por Dirichlet:

> La idea del camino a seguir para la solución de este problema le vino al comprender que las series infinitas se dividen en dos clases absolutamente distintas, según que, al hacer positivos todos sus miembros, permanezcan convergentes o no. En las primeras los miembros pueden ser reordenados a voluntad, pero el valor de las últimas depende del orden que les demos. […] Las leyes de las sumas finitas solo son aplicables a las series de la primera clase; solo ellas pueden realmente ser consideradas como la colección de todos sus miembros, no las series de la segunda clase; circunstancia que había pasado inadvertida a los matemáticos del pasado siglo. […] Obviamente, la serie de Fourier no pertenece necesariamente a la primera clase.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right),$$

la serie de Fourier de una función *f*.

Dirichlet escribió sus sumas parciales en la forma:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{2N+1}{2}(x-\alpha)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x-\alpha)\right)} d\alpha$$

y demostró que convergen al valor $\left(f(x+0)+f(x-0)\right)/2$ cuando la función *f* es monótona y continua en un número finito de intervalos. Dice Riemann:

Dirichlet basa su demostración en dos teoremas. Supuesto que la función $\varphi(\beta)$ sea monótona (creciente o decreciente) entre los límites de las integrales,

1. Si $0 < c \leq \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\int_0^c \varphi(\beta)\frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\beta\right)}{\operatorname{sen}(\beta)}d\beta$$

se aproxima infinitamente al valor $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ con n creciente.

2. Si $0 < b < c \leq \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\int_b^c \varphi(\beta)\frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\beta\right)}{\operatorname{sen}(\beta)}d\beta$$

se aproxima infinitamente al valor 0 con n creciente.

Con la ayuda de estos dos teoremas se puede obviamente, si la función f no pasa infinitas veces de aumentar a disminuir o de disminuir a aumentar, descomponer la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x-\alpha)\right)}d\alpha$$

en una cantidad finita de miembros, de los cuales uno converge a la cantidad $f(x+0)/2$, otro a $f(x-0)/2$, y los restantes convergen a 0, cuando n crece a infinito. De aquí se deduce que es representable, por medio de una serie trigonométrica, toda función que se repite periódicamente según el intervalo 2π y que:

- admite integración en todo su recorrido;

- no tiene infinitos máximos y mínimos, y
- toma, donde su valor cambia por saltos, el valor medio entre los límites por ambos lados.

> Con el trabajo de Dirichlet obtuvieron fundamento firme una gran cantidad de investigaciones analíticas importantes. […] Le fue dado resolver una cuestión que ocupara a tantos matemáticos distinguidos desde hacía más de setenta años. En realidad, para todos los casos de la naturaleza, los únicos de que se trataba, quedó plenamente resuelta; pues por grande que sea nuestra falta de conocimiento sobre cómo las fuerzas y estados de la materia varían según lugar y tiempo en lo infinitesimal, sin duda podemos suponer que las funciones a las que no se extiende la investigación de Dirichlet no se dan en la naturaleza.

En esto, como ahora sabemos, Riemann se equivocaba, pero su error se justifica quizás por la devoción sentida hacia su maestro, que le indujo a sobreestimar la universalidad de sus resultados obtenidos por Dirichlet. Más a renglón seguido se enmienda con la siguiente afirmación:

> Los casos no resueltos por Dirichlet merecen atención por dos razones simples: en primer lugar, como Dirichlet mismo menciona al final de su memoria, este asunto está en la más estrecha conexión con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para traer dichos principios a una mayor claridad y precisión. Pero en segundo lugar, la utilidad de las series de Fourier no se limita a investigaciones físicas; hoy se ha aplicado con éxito también a un campo de la matemática pura, la teoría de los números, y aquí parecen ser de importancia precisamente aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no ha investigado Dirichlet.

Parte II: Sobre la noción de integral definida y el ámbito de su validez

Habiendo pues planteado el problema y presentados sus antecedentes, el primer paso para ir más allá de lo obtenido por Dirichlet era dar sentido a las fórmulas de Fourier para funciones «arbitrarias». Escribe Riemann:

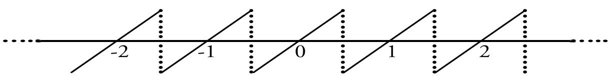
> La incertidumbre que aún reina en algunos puntos fundamentales de la teoría de las integrales definidas nos fuerza a anteponer algunas consideraciones sobre el concepto de integral definida y el ámbito de su validez: ¿qué hay que entender por $\int_a^b f(x)\,dx$?

Para darle respuesta introduce la noción de integral de una función acotada a través de las sumas, ahora llamadas de Riemann, y da una condición necesaria y suficiente para que una tal función sea integrable, considerando la oscilación ω_j de la función en un intervalo I_j de una partición dada del dominio de integración. La condición necesaria y suficiente para que las sumas converjan, y por tanto f sea integrable, es que la suma total de las longitudes de los intervalos de la partición donde la oscilación supera a un número positivo dado pueda hacerse arbitrariamente pequeña con el diámetro de la partición. Años después el criterio adquirió su versión actual equivalente: f es integrable (Riemann) si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero. Es un hecho notorio que todas las monografías que se han escrito desde entonces para explicar el cálculo diferencial introducen esta definición de integral.

A continuación, en la tesis se presenta un ejemplo de una función que es integrable en el nuevo sentido y que, sin embargo, es discontinua en un conjunto denso de puntos. Es decir, que se trata de una extensión genuina de la noción de Cauchy de integrales de funciones continuas, o continuas a trozos. Sea

$$(x) = \begin{cases} x-m, & \text{si } |x-m|<\frac{1}{2}; \\ 0, & \text{si } x=m+\frac{1}{2} \end{cases} \qquad m \in Z \ ,$$

cuya gráfica es la función periódica en forma de dientes de sierra:



Entonces la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

tiene sus discontinuidades en los puntos racionales de la forma $a/2b$, $mcd(a, 2b) = 1$, que son densos en toda la recta real. Además, a partir de la fórmula de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ ,$$

es un ejercicio sencillo comprobar que:

$$f\left(\frac{a}{2b}+0\right) - f\left(\frac{a}{2b}-0\right) = -\frac{\pi^2}{8b^2} \ .$$

Pero $f(x)$ está acotada por $\pi^2/6$ y es integrable, por cuanto sus discontinuidades son numerables. La función

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

resulta ser continua:

$$\left|F(x+h) - F(x)\right| \leq \int_x^{x+h} \left|f(t)\right| dt \leq \frac{\pi^2}{6} h.$$

Sin embargo carece de derivada precisamente en esos puntos $a/2b$, con $mcd(a, 2b) = 1$. Veamos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F\left(\frac{a}{2b}+h\right)-F\left(\frac{a}{2b}\right)}{h} = f^+\left(\frac{2}{2b}\right),$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F\left(\frac{a}{2b}+h\right)-F\left(\frac{a}{2b}\right)}{h} = f^-\left(\frac{2}{2b}\right),$$

Surge la pregunta: ¿existirá una función continua que carezca de derivada en todos sus puntos?

Parte III:
Sobre la posibilidad de representar una función por una serie trigonométrica, sin hacer ninguna hipótesis sobre la naturaleza de la función

> Mientras que los trabajos anteriores establecen proposiciones del tipo: «si una función goza de tal o cual propiedad, entonces puede ser desarrollada en serie trigonométrica», nosotros nos proponemos la cuestión inversa: «si una función es desarrollable en una serie de Fourier, ¿qué podemos inferir sobre la función, y sobre la variación de sus valores cuando el argumento cambia de forma continua?»

Las ideas y las técnicas introducidas por Riemann para abordar esta cuestión han tenido, y siguen teniendo, una gran influencia en el desarrollo del análisis matemático, muy por encima, quizás, de la importancia de los resultados concretos obtenidos en esta sección. Un ejemplo notable es la generalización de la noción de *derivada* (derivada segunda), para la que se aportan dos posibilidades.

La función continua $F(x)$ tiene derivada segunda en el punto x si existe el límite:

$$D^2 F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

Observemos que si $F''(x)$ existe en el sentido de Newton y Leibniz, entonces tenemos que $D^2 F(x) = F''(x)$. Pero el ejemplo

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

muestra que podemos tener $D^2F(0)$, mientras que $F''(0)$ no está definida. Luego se trata de una genuina extensión de la noción de derivada segunda.

Riemann demuestra la proposición siguiente: si una función periódica $f(x)$ de periodo 2π puede ser representada por una serie trigonométrica, entonces existe una función continua $F(x)$ tal que $D^2F(x) = f(x)$ en todo punto. Y se verifica la identidad:

$$\int_a^b D^2F(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b F(x)\varphi''(x)\,dx$$

para toda función φ con dos derivadas continuas y que se anule fuera de (a, b).

Sería ocioso subrayar la importancia de esta noción, y su carácter precursor de las derivadas débiles de la teoría de distribuciones. La manera concreta en la que aparece la derivada débil es para obtener uno de los resultados notables de la tesis, el ahora llamado teorema de localización: la convergencia o divergencia de una serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right)$$

en un intervalo $I \subset [0,1]$ depende solo de los valores que toma la función

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right)$$

en ese mismo intervalo.

Bajo la hipótesis $|a_n| + |b_n| = o(1)$, que Riemann deduce de la convergencia en todo x, demuestra que

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int F(t)\varphi(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2N+1}{2}(x-t)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)dt$$

tiende a 0 cuando N tiende a infinito, para toda función $\varphi\in C_0^{\infty}(I)$ que sea idénticamente igual a 1 en un entorno del punto x.

Se debe a G. Cantor la detección del siguiente corolario del teorema de Riemann que es conocido como:

Teorema de unicidad. *Supongamos que la serie trigonométrica*

$$(*)\quad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right)$$

converge al valor 0 en todo punto $x\in[0,2\pi]$*. Entonces todos los coeficientes son nulos.*

Observemos que si supiésemos de antemano que $(*)$ es la serie de Fourier de una cierta función integrable, es decir, que sus coeficientes vienen dados por

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)\,dt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

entonces la solución sería muy fácil. Lo que convierte al resultado de Riemann en algo delicado es el hincapié en que $(*)$ sea una serie trigonométrica general, de la que carecemos de información alguna sobre sus coeficientes.

Permitiéndonos tan solo la licencia de trastocar un poco el orden del razonamiento y describir algunos pasos con la notación contemporánea, la arquitectura de la demostración de Riemann es la siguiente:

- Paso 1.- Se demuestra que la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right)$$

en todo punto $x\in$ E (E de medida positiva) implica que

$$\lim_{n\to\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)=0.$$

- Paso 2.- Con una doble integración se obtiene la función continua

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right).$$

- Paso 3.- La hipótesis

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right)\right)=0$$

implica que $D^2F(x)=0$, para todo , donde $D^2F(x)$ designa a la derivada segunda generalizada de Riemann:

$$D^2F(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x+h)-2F(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(nh/2)}{nh/2}\right)^2\right].$$

- Paso 4.- Se comprueba que si $D^2G(x)$ existe y es estrictamente positiva en un intervalo, entonces G es convexa. Análogamente, si $D^2G(x) < 0$ en un intervalo, entonces G es cóncava.

Finalmente si $D^2G(x) = 0$ en todo x, entonces $G(x) + \varepsilon x^2$ es convexa para todo $\varepsilon > 0$, luego también lo es G por ser un límite uniforme de funciones convexas. De manera análoga, $G(x) - \varepsilon x^2$ es cóncava y tomando límites cuando tiende a 0, obtenemos que G es cóncava.

Conclusión: $D^2G \equiv 0$ en un intervalo implica que G es cóncava y convexa, luego es lineal.

- Paso 5.- De los pasos anteriores obtenemos que

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right)$$

es lineal. En particular eso implica que $a_0 = 0$ y que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right) \equiv 0 \ .$$

Pero esta última es la serie de Fourier de la función idénticamente nula y, por tanto, $a_n = b_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

Hasta la fecha no existe otra demostración, distinta de la dada por Riemann, del hecho fundamental de que si dos series trigonométricas convergen puntualmente al mismo valor, entonces son necesariamente idénticas. En el caso de varias variables existe la variante de tomar sumas parciales de diversos modos.

Cuando se consideran sumas esféricas, un resultado reciente de J. Bourgain demuestra que el teorema de Riemann sigue siendo válido. Pero si consideramos las sumas en cubos la cuestión está todavía por decidir. Concretamente, en dimensión n ≥ 2, tenemos series

$$f \sim \sum_{\nu\in z^n} a_\nu\, e^{i\nu.x},\ \nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n).$$

Con la notación $\|\nu\|_\infty$ = max $(|\nu_1|,\ldots,|\nu_n|)$, podemos escribir las sumas parciales cúbicas

$$S_N f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\|\nu\|_\infty \le N} a_\nu \, e^{i\nu.\boldsymbol{x}}$$

Problema abierto: si existe $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = 0$ en todo $x \in [0, 2\pi]^n$ ¿han de ser todos los coeficientes nulos necesariamente?

Como indicamos antes, Cantor se interesó por la tesis de Riemann y extendió el teorema de unicidad en el sentido siguiente: supongamos que la convergencia a cero de la serie trigonométrica la conocemos en todos los puntos salvo, quizás, por un conjunto finito para los que carecemos de información:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right)\right] = 0$$

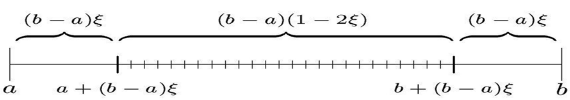
para todo $x \in [0, 2\pi] - \{x_1, \ldots, x_p\}$. Cantor demostró que, también en este caso, la serie de partida ha de tener todos sus coeficientes nulos. ¿Qué ocurre si eliminamos un conjunto infinito? Se trata de una pregunta natural, pero muy difícil, que da lugar a una interesante definición. Diremos que un subconjunto *U* de *[0,2π]* es un conjunto de unicidad si toda serie trigonométrica que converge puntualmente a cero en el complemento de *U* (es decir, en $[0,2\pi] - U$), ha de tener, necesariamente, todos sus coeficientes nulos. Con los métodos analíticos actuales resulta fácil comprobar que un conjunto de unicidad es de medida (de Lebesgue) igual a cero. Pero el recíproco es falso: hay conjuntos de medida cero que no son de unicidad. Y esto es un hecho por lo menos inquietante, por cuanto implica la existencia de series trigonométricas que convergen en casi todo punto a una función integrable *f* sin coincidir con su serie de Fourier. En estos comienzos del siglo XXI sigue siendo un problema abierto caracterizar a los conjuntos de unicidad. No obstante Cantor demostró un resultado muy notable: una condición suficiente para que *U* sea de unicidad es que U_n (conjunto derivado de U de orden n) sea vacío para algún entero positivo n.

Llama la atención que un problema tan concreto sobre las series trigonométricas llevase a Cantor a introducir conceptos tales como *punto de acumulación* y *conjunto derivado.* Y a crear la teoría de los cardinales transfinitos, de la que surgió, entre otros, el problema de la hipótesis del continuo. Un objeto importante es el conjunto de Cantor C_ξ de razón de disección $\xi < 1/2$, que no es numerable, puesto que su cardinal es el de todos los reales, pero que, sin embargo, tiene medida igual a cero.

A partir de un intervalo $[a, b]$ obtenemos dos,

$$[a, a + (b - a)\xi\,] \;\bigcup\; [b - (b - a)\,\xi, b],$$

ambos de longitud $(b - a)\,\xi$.



Aplicado el proceso k veces a $[0, 2\pi]$ resultan $2k$ intervalos de longitudes $2\pi\xi^k$ cuya unión la designamos por $C_k(\xi)$. El conjunto de Cantor es la intersección de todos ellos:

$$C_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\left(\xi\right).$$

En el año 1922, Alexander Rajchman demostró que el conjunto ternario de Cantor ($\xi = 1/3$) es de unicidad. Su alumno, Antoni Zygmund, se doctoró en 1923 con una tesis sobre esta teoría, escribiendo posteriormente el libro *Trigonometric Series,* un clásico del análisis armónico del siglo XX, que está dedicado a Rajchman, su maestro, y a Marcinkiewicz, su discípulo, desaparecidos ambos trágicamente durante la Segunda Guerra Mundial. Del año 1955 es el siguiente resultado de R. Salem y A. Zygmund:

Teorema. *El conjunto de Cantor* C_ξ *es de unicidad si y solo si* $\vartheta = 1/\xi$ *es un número de Pisot.*

Un número de Pisot ϑ es un número algebraico cuyos conjugados algebraicos $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ verifican que $\vartheta = \vartheta_1 > 1$, $|\vartheta_2| < 1, \ldots, |\vartheta_n| < 1$. Estos números fueron definidos por su relación con los problemas de distribución uniforme módulo 1. Son ejemplos de números reales tales que las partes fraccionarias de sus potencias enteras no están uniformemente distribuidas en el intervalo unidad. La demostración de Salem y Zygmund es muy bella, puesto que conecta de forma precisa dos conceptos tan diferentes, a priori, como son la unicidad de las series y los números de Pisot.

Parte IV:
Ejemplos y contraejemplos

Riemann utiliza el concepto de *valor principal de una integral*, introducido por Cauchy, para ampliar el conjunto de funciones que son integrables, yendo más allá de las acotadas. En esta parte de la tesis considera el ejemplo siguiente:

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}\cos\frac{1}{x}\right),\quad 0<\nu<\frac{1}{2},\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi} f(x)\,dx=(2\pi)^{\nu}\cos\frac{1}{2\pi}.$$

Sin embargo, observa a renglón seguido que:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \sim \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{n}+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\, n^{(1-2\nu)/4}.$$

Es decir, los coeficientes de su serie de Fourier se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, aquella no puede ser convergente.

En sentido opuesto nos presenta a la función:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n},$$

donde, como antes, *(x)* representa la diferencia entre x y su entero más cercano. Luego escribe, sin dar la demostración, la identidad:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{i}(n)-d^{p}(n)}{\pi n}\operatorname{sen}(\pi n x),$$

siendo $d^i(n)$ el número de divisores impares de n y $d^p(n)$ el número de divisores pares de n. Esta función está bien definida, es integrable Lebesgue, pero no es integrable a la Riemann, porque su oscilación se hace infinita en cualquier intervalo que consideremos. Luego Riemann añade el comentario siguiente:

Se obtiene un ejemplo del mismo tipo con las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(n^2 x\right) \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(n^2 x\right),$$

cuando las cantidades positivas decrecientes c_0, c_1, c_2… se hacen infinitamente pequeñas, pero para las cuales $\sum_n c_n$ se hace infinitamente grande.

Resultaría ocioso mencionar a las funciones *theta* para motivar el interés de Riemann por este tipo de series. Pero creo interesante resaltar que en la tesis se mencione un asunto que sigue siendo un problema abierto en el análisis armónico, con aplicaciones aritméticas notables:

Si una función integrable (Lebesgue) tiene una serie de Fourier de la forma $\sum c\ e^{in^2 x}$, ¿es cierto que $\| f \|_p \ll \| f \|_1$, para $1 < p < 4$?

Cuando los coeficientes forman una sucesión monótona decreciente (como en los ejemplos de Riemann) sabemos que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. Pero en el caso general, coeficientes arbitrarios, se ha mostrado, hasta ahora, muy difícil y elusiva.

De los ejemplos mostrados en la segunda parte de la tesis acerca de la relación entre continuidad y diferenciabilidad se desprendía una pregunta natural a la que no se le dio respuesta: ¿existirá una función continua que carezca de derivadas en todos sus puntos? K. Weierstrass encontró un ejemplo explícito de una función con esas características y lo presentó en una conferencia dada en la Academia de Ciencias de Berlín, el 8 de julio de 1872. Consiste en una serie trigonométrica «lacunar»:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n x\right),$$

donde a es un entero impar, $0 < b < 1$, de manera que $ab > 1 + 3\pi/2$.

Según parece, K. Weierstrass descubrió el ejemplo anterior como consecuencia de su fracaso en demostrar una conjetura de Riemann. En su carta a Du Bois-Raymond decía que «hasta donde yo alcanzo a saber, Riemann ha afirmado que las funciones

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n^2x)}{n^2} \quad y \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2x)}{n^2}$$

carecen de derivada en todos sus puntos». Aunque Riemann no había comunicado la demostración, sino que, en una cierta ocasión, había indicado que la prueba se podía hacer usando las funciones elípticas.

Cualquiera que se interese por la historia de esta notable función puede comprobar con facilidad que se han publicado más de doscientos artículos sobre ella. En *Riemann´s example of a continuous non-differentiable function in the light of two letters of Christoffel to Prym*, publicado en 1986 en el *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique,* los autores, P. Butzer y E. Stark, analizan hasta la saciedad la evidencia disponible acerca de si, en realidad, Riemann dijo o no dijo, que la función carece de derivada en todos sus puntos. En mi opinión se trata de un ejemplo que muestra hasta qué extremos puede llegarse al hacer la historia de la ciencia. Seguramente es irrelevante discernir si Riemann afirmó o no tal cosa, excepto, quizás, por el posible morbo de encontrar una pifia menor en la obra de tan gran matemático, habida cuenta de que muchos años después se encontraron puntos donde f es diferenciable. Lo cierto es que hallar una función continua carente de derivada en todos sus puntos, era un problema natural e importante en esa época. También lo es que la función f, que está estrechamente relacionada con la función *theta,* era un objeto matemáticamente muy interesante para Riemann, y para muchos otros y durante bastante tiempo después, como es el caso de G. Hardy y J. Littlewood, quienes la trataron en dos artículos. Demostraron que las funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi n^2x)}{n^2} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n^2x)}{n^2}$$

carecen de derivada cuando x es irracional, o bien un racional cuya fracción reducida es de la forma $a/4b$, $a/(4b+1)$. Sin embargo, J. Gerver demostró que tanto f como g son derivables en los $x = a/q$, mcd$(a, q) = 1$, cuando $q \equiv 2 \bmod 4$. Además, el valor de las respectivas derivadas es $-\pi$ y 0, como se muestra en las figuras obtenidas con la ayuda del ordenador del capítulo anterior.

Como ya se mencionó allí, Gerver era un estudiante de primer curso en la Universidad de Columbia (New York), y consiguió este resultado porque su profesor de Cálculo, S. Lang, había mencionado el problema en clase. Gerver lo resolvió y la demostración apareció en el *American Journal of Mathematics* (1970). De haber tenido acceso a las gráficas que ahora nos proporcionan los ordenadores, es seguro que tanto Riemann primero, como Hardy y Littlewood después, hubiesen previsto esos puntos de diferenciabilidad. Aunque en honor a Gerver hay que añadir que tampoco en 1970 existían los excelentes programas para dibujar funciones de los que ahora disponemos.

Un capítulo notable de las matemáticas contemporáneas es el de las geometrías fractales, que aparecen en el estudio de los sistemas dinámicos caóticos y en los modelos creados para entender los regímenes turbulentos en la mecánica de fluidos. Existen diversas nociones de dimensión fractal, una de ellas es la llamada dimensión por cajas, o dimensión de Minkowski.

Teorema. *La dimensión de Minkowski de las gráficas de las funciones f y g es 5/4.*

Comentario final

En las obras completas de Riemann, publicadas después de su muerte, encontramos el siguiente texto de R. Dedekind refiriéndose a esta tesis:

> Esta memoria fue presentada por su autor, en 1854, a la Facultad de Filosofía para obtener su habilitación en la Universidad de Göttingen. Aunque el autor no parece haber tenido intención de publicarla, la impresión de este trabajo sin cambio alguno nos parece más que justificada, tanto por el considerable interés del tema en sí, cuanto por la forma en la que son tratados los principios más importantes del análisis infinitesimal.
>
> Brunswick, julio de 1867. R. Dedekind

Habida cuenta de lo que hemos encontrado en su lectura (que incluye la formulación del problema de la unicidad de los desarrollos trigonométricos y su solución en un caso fundamental; la extensión de la noción de *integral* más allá de las definiciones de Newton, Leibniz y Cauchy; las generalizaciones de la noción de *derivada,* incluyendo una clara alusión al concepto de *derivada débil* del cálculo de distribuciones; los ejemplos de funciones continuas que carecen de derivada en conjuntos densos de puntos; y las diversas áreas futuras que supo entrever, como los fractales o la teoría de conjuntos de puntos), sorprende que Riemann no estuviese del todo satisfecho con su trabajo y que no se planteara su publicación.

Como no parece haber testimonio escrito del autor, solo podemos especular acerca de sus motivos. Por un lado estaban los usos de aquella época, el *pauca sed matura* de Gauss, que debía imponer un tanto a un joven profesor de Göttingen, pero eso no es todo y quizás si podamos aventurar algunas de sus razones.

Por un lado, Riemann ha generalizado la noción de *integral,* pero para poder integrar funciones no acotadas tiene que hacer uso del «valor principal» y ahí aparece la función $\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}\cos\frac{1}{x}\right)$ que puede integrar entre 0 y 2π, pero resulta que sus coeficientes de Fourier no tienden a cero. Por otro lado se encuentra con series trigonométricas que convergen en todo punto a una función f que no es integrable según su definición. Es claro que a Riemann esta situación no podía satisfacerle y, además, tampoco pudo demostrar que las series de Fourier de sus funciones integrables convergían de manera razonable. Ahora sabemos que estas cuestiones eran muy difíciles y, quizás, imposibles para aquella época; pensemos en la integral de Lebesgue; el ejemplo de Kolmogorov de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto; en el teorema de Carleson, que es del año 1964; o en el problema todavía abierto de caracterizar los conjuntos de unicidad. Digamos, no obstante, que se trata de otra muestra de la profundidad y grandeza de Riemann: la insatisfacción por lo no realizado le impedía publicar los magníficos resultados que había obtenido.

Epílogo:
una mente bella

La gran crisis del pensamiento matemático griego que produjo el descubrimiento de los números irracionales llevado a cabo por la escuela pitagórica impulsó la distinción entre lo discreto y lo continuo, es decir, entre la aritmética y la geometría. Luego vino el álgebra de los árabes y los matemáticos del Renacimiento. Pero hay que esperar al Barroco para que se invente el cálculo, para que el hombre aprenda a sumar infinitos sumandos y multiplicar infinitos factores. Ese gran salto dado por Newton y Leibniz, los hermanos Bernoulli y tantos otros nos hizo pasar de la infancia a la juventud matemática. Newton utilizó el cálculo infinitesimal para explicar el universo a través de su teoría de la gravitación que, seguramente, representa la cima del éxito de las matemáticas para entender la naturaleza, y el modelo científico que después hemos querido siempre reproducir. Por su parte Leibniz, además de crear el lenguaje del cálculo que todavía seguimos usando, introdujo el sistema binario de numeración, junto a otras muchas ideas que han resultado ser muy fecundas para el nacimiento del centauro matemático + ordenador.

Leonhard Euler y Joseph L. Lagrange son los dos grandes matemáticos de la Ilustración. En sus obras, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz se convirtió en una poderosa máquina analítica, capaz de llevar a cabo tareas tan ambiciosas como fue la modelización de las diversas ramas de la mecánica. En ambos se da también un equilibrio entre las varias caras de las matemáticas: como parte de la ciencia, como herramienta para otras ciencias y como un estudio con su propia dinámica, fines y criterios. No cabe duda de que las obras de Newton, Leibniz y los Bernoulli son un momento estelar de la creación matemática, como seguramente también lo fue la época de Gauss y Riemann, a mediados del siglo XIX, o la de Hilbert y Poincaré, ya en el XX. Aunque resulte magnífica, se mire como se mire, quizás la contribución del Siglo de las Luces no posea la potente originalidad que tuvo la de sus predecesores del Barroco, o sus continuadores del Romanticismo. Sin embargo puede afirmarse que el XVIII fue el gran siglo de nuestra ciencia, hasta el punto de que muchas otras disciplinas científicas eran consideradas entonces matemáticas mixtas o aplicadas, siguiendo la terminología introducida por D'Alembert, quien es otro de los grandes genios ilustrados. Después, en el siglo XX, la ciencia de moda fue la física, como ahora lo es la biología molecular. Aunque los logros de las matemáticas en ese tiempo han sido enormes, sin embargo, solo fueron la disciplina «de moda» hasta el siglo XVIII.

Euler es un claro exponente de la maravillosa universalidad de la ciencia. Aunque no fuera profesor universitario, ejerció una gran influencia en la organización del oficio, y no solo por su descomunal obra, que ocupa más de cien volúmenes y cuya recopilación todavía está por completar. De carácter afable, fue considerado en su tiempo el maestro de todos los matemáticos. Por ejemplo, de Lagrange, quien fue animado e inspirado por Euler (algunos años mayor que él) en sus investigaciones sobre el cálculo de variaciones, cuyas ecuaciones fundamentales denominamos hoy de Euler-Lagrange.

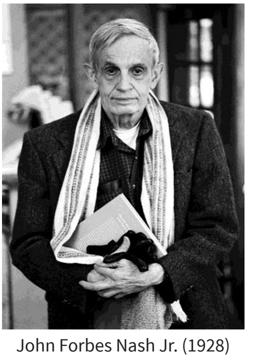
El siglo XVIII es una época en la que se están creando instituciones (academias de ciencias y revistas científicas especializadas) y procedimientos, como la elaboración de tesis doctorales. Por lo que no debe resultarnos extraño que el árbol genealógico académico de una parte importante de los matemáticos de nuestro tiempo tenga su origen en el tándem Euler-Lagrange.

Nacido en Basilea, Suiza, en el año 1707, Euler vivió la mayor parte de su vida entre San Petersburgo y Berlín (Rusia y Prusia), cuyas Academias de Ciencias rivalizaron para tenerlo como miembro distinguido. Su vida resalta en estos comienzos del siglo XXI,

L. Euler (1707-1783)

cuando todavía se dan tantas vueltas a las peculiaridades nacionales, que tantos problemas artificiales plantean y tan escasas soluciones encuentran. Su obra tiene también un carácter universal e impregna áreas tan diversas como la teoría de los números o la mecánica de fluidos, donde hay un antes y un después de que formulara sus ecuaciones, que son un hito en la modelización de la física de los medios continuos. ¿Fue Euler un matemático puro o mixto? ¿Analista, geómetra o algebrista? Seguramente él sonreiría y mostraría su perplejidad ante semejantes preguntas. Y, sin embargo, aún hay a quien le gusta polemizar en torno a si existe realmente una matemática aplicada o tan solo aplicaciones de las matemáticas. En muchas universidades encontramos departamentos de Álgebra, de Geometría, de Análisis, de Matemática Aplicada y de Probabilidad y Estadística, que parcelan la docencia, a menudo de manera bastante artificial.

Las biografías de Euler suelen subrayar su carácter afable. Al parecer, tan solo en una ocasión participó en una polémica un tanto agria: fue en defensa de la prioridad de Maupertuis, entonces presidente de la Academia de Berlín, sobre la paternidad del principio de la mínima acción. En ella tropezó con Voltaire, quien destiló varios comentarios ingeniosos, irónicos y punzantes sobre la escasa habilidad de Euler en cuestiones filosóficas. Pero no parece que a este le afectasen demasiado (aunque sí le dolieron algo más los desdenes del emperador Federico II), e incluso confió a sus allegados que, efectivamente, tenía que haber estado mejor preparado en las sutilezas del lenguaje filosófico, y en la maestría de las respuestas rápidas y brillantes, antes de haber polemizado con Voltaire. Seguramente se debió a su proverbial buen carácter que no solo pasara por el episodio sin irritarse sino que, incluso, le hiciesen cierta gracia los aguijonazos que le prodigó el escritor y filósofo. No obstante, también es cierto que un hombre de obra tan fecunda, que abarcó a todas las matemáticas y parte de la física de su tiempo, y que descubrió las ecuaciones que rigen los movimientos de la atmósfera y los océanos, es decir, matematizó los dominios de Eolo y de Neptuno, no iba a enfadarse, o siquiera sentirse molesto, por ser objeto de las burlas del ingenioso Voltaire. En un artículo periodístico, el premio Nobel Mario Vargas Llosa, como también lo había hecho antes Graham Greene, se preguntaba, creo que con cierta ligereza, por las escasas aportaciones suizas, reloj de cuco aparte, a la gran cultura universal. ¿Qué contestarían Euler o los también suizos Jakob, Johan y Daniel Bernoulli? Da la impresión de que ya sea por activa o por pasiva, no han tenido nuestros grandes matemáticos ilustrados una buena estrella literaria.


John Forbes Nash Jr. (1928)

Pero conviene resaltar la bonhomía y la «normalidad» de la vida de Euler, que es seguramente la de la mayoría de los matemáticos, por cuanto los medios de comunicación suelen hacerse eco solamente de aquellos casos que apuntan en la dirección opuesta. El de John Nash es especialmente notorio, por haber recibido el premio Nobel de Economía en el año 1994, después de superar una grave enfermedad mental, y por haber inspirado la película *Una mente maravillosa*, basada en su biografía, de título parecido, que había escrito la periodista Sylvia Nasar. Pero también la prensa nos ha dado noticia de Grigori Perelmann, quien hizo declaraciones un tanto extrañas cuando demostró la conjetura de Poincaré y renunció a la recompensa de un millón de dólares de la Fundación Clay, así como a la Medalla Fields que le otorgó el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Madrid en 2006 y a las jugosas ofertas de varias universidades de prestigio, para llevar una vida humilde, en San Petersburgo, retirado del mundo académico. También los casos de Alexander Grothendieck y de Paul Erdős han originado crónicas literarias por sus vidas singulares. Pero todos ellos, incluyendo a Euler cuya biografía hemos glosado someramente, crearon teoremas que son auténticos hitos del pensamiento humano y que poseen todos los ingredientes de dificultad, sorpresa, profundidad y sutileza en el engarce de las ideas que son inherentes a toda construcción matemática genuina. Participan de esa belleza lejana que exige algún esfuerzo a quien desee apreciarla. Y de naturaleza tan elusiva como bien aciertan a describir los versos de Juan Ramón Jiménez:

Mariposa de luz
la belleza se va cuando yo llego a su rosa
la medio cojo aquí y allá
al final solo queda el cenizo de su huida.

Atisbar la perfección y la belleza matemática es un auténtico triunfo de la inteligencia humana. Pero ansiar alcanzarla puede devenir en una aventura tan fascinante como peligrosa. Porque en matemáticas lo difícil es lo único que cuenta. Y el creador auténtico se caracteriza por su decidido empeño en evitar las repeticiones y huir de los caminos más concurridos. Difícilmente logramos demostrar todo lo que nuestra intuición cree haber visto cuando miramos más allá de las fronteras de lo conocido. Quizás las mentes menos exigentes sean felices con las mil pequeñas variaciones de temas trillados y consigan cierta satisfacción engordando una lista de publicaciones que incluya, como suele decirse, a revistas de cierto prestigio. Pero un genuino creador casi nunca está plenamente satisfecho con lo obtenido. A veces parece que solo importa verdaderamente lo que no se ha logrado demostrar. De manera que cuando miramos a la propia obra, siempre tendemos a destacar todo aquello que no hemos podido añadirle.

Aunque la juventud sea un defecto que se corrige con el paso del tiempo, como bien sabía Jardiel Poncela, suele afirmarse que las matemáticas son un oficio de jóvenes. Y que es durante la edad de la arrogancia, entre los veinte y los treinta y pocos años, cuando la mente humana alcanza su máximo poder de invención. Después viene el declive, y pasados los cincuenta quedan ya pocas esperanzas de originalidad. Esa es la opinión melancólica de G. Hardy, que siempre podremos matizar con oportunos contraejemplos. Empero, algo de cierto creo que hay detrás de esa amargura: enorme la cantidad de energía mental que es menester concentrar en la investigación matemática; muchas las astucias de la razón precisadas para rodear las dificultades y derrotar a los enemigos de nuestras estrategias más directas, para conseguir ese épsilon de más con el cual todo es diáfano y sin cuya colaboración nuestras construcciones se vienen lamentablemente abajo. Solo quienes hayan estado cerca del mismo descubrimiento podrán distinguir en un teorema lo que ha sido creado en una inspiración feliz de lo que es el producto de un trabajo sistemático y minucioso.

Después de un tiempo que puede resultar más o menos largo, a veces incluso de años, de perseguir un problema. Cuando uno se siente próximo a desvelar la verdad y todo parece converger. Cuando las ideas se engarzan en cadenas perfectas que nos llevan hacia la montaña desde la que esperamos contemplar el bello paisaje de nuestra teoría. ¡Qué locura! En esos momentos todo buen matemático se convierte en un ser un tanto autista. Pasarán a un segundo plano el mundo y sus valores, la seguridad, la amistad, incluso la familia, con tal de obtener el teorema. Pero lograrlo es elevarse, vencer al tiempo y conseguir la sonrisa de la más hermosa. Y esa es una experiencia que siempre se querrá repetir.

Madrid, enero de 2013

Índice onomástico

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

Y

Z