Universidad Autónoma de Madrid Curso 2019-20

Matemáticas/ Ingeniería Informática-Matemáticas

TEORÍA DE GALOIS

Hoja 5.Aplicaciones.

1. Decimos que una extensión E/K es **abeliana** si E/K es de Galois y $\mathrm{Gal}(E/K)$ es un grupo abeliano. Demuestra que si E/K es abeliana y $K \subseteq L \subseteq E$ es un subcuerpo intermedio, entonces E/L y L/K son abelianas.

2. Sea E/K una extensión y $K \subset L, M \subset E$ subcuerpos intermedios. Se define $\langle L, M\rangle$ como la intersección de todos los subcuerpos de E que contienen a L y M.

a) Prueba que $\mathrm{Gal}(E/L) \cap \mathrm{Gal}(E/M) = \mathrm{Gal}(E/\langle L, M\rangle)$.

b) Supongamos que $E = \langle L, M\rangle$ y sea $F = L \cap M$. Si M/K es Galois, desmuestra que E/L es Galois y que la restricción $\mathrm{Gal}(E/L) \to \mathrm{Gal}(M/F)$ es un isomorfismo de grupos.
Sugerencia: Prueba que E/L es Galois. La restricción $\Theta\colon \mathrm{Gal}(E/L) \to \mathrm{Gal}(M/F)$ definida por $\tau \mapsto \tau_M$ es un homomorfismo de grupos, usando que M/F es una subextensión normal de E/F. Demuestra que Θ es inyectiva y sobreyectiva usando el apartado (a).

Extensiones ciclotómicas. Si ξ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, entonces la extensión $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ es la n-ésima extensión ciclotómica de $\mathbb{Q}$

3. Sea ξ una raíz primitiva n-ésima de la unidad, y sea $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ la n-ésima extensión ciclotómica de $\mathbb{Q}$.

a) Prueba que $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ es Galois

b) Demuestra que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ es abeliano. ¿Es $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ siempre cíclico?
Sugerencia: Calcula la octava extensión ciclotómica de $\mathbb{Q}$.

4. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva novena de la unidad, $E = \mathbb{Q}(\omega)$ y $\Omega = \{\omega^j \mid 0 \le j \le 8\} \subset E$ el conjunto de raíces del polinomio $x^9 - 1$:

a) Calcula el polinomio mínimo de ω sobre $\mathbb{Q}$.

b) Determina $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

c) Encuentra elementos $u, v \in E$ expresados como combinación lineal de potencias de ω de modo que $|\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}| = 3$ y $|\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}| = 2$.

d) Determina las órbitas que la acción de G define sobre Ω.

5. Prueba que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt[3]{3}i)/\mathbb{Q}$ es radical.

6. Sea G un grupo finito. Demuestra que:

a) Si G es resoluble y $H \le G$, entonces H es resoluble.

b) Si $N \triangleleft G$, entonces G es resoluble si, y solo si, G/N y N son resolubles.
Sugerencia: utiliza el “Segundo Teorema de isomorfía para grupos”: Sea G un grupo, sea $L < G$ y sea $N \triangleleft G$; entonces (i) $LN < G$; (ii) $L \cap N \triangleleft L$; (iii) $LN/N \simeq L/L \cap N$.

7. Demuestra que S_4 es resoluble. Demuestra que S_n no es resoluble para todo $n \ge 5$.

8. Demuestra que el polinomio $x^5 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ no es resoluble por radicales.

9. Sea p un primo y sea $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado p. Supongamos que $q(x)$ tiene exactamente dos raíces complejas no reales. Demuestra que entonces el grupo de Galois de $q(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ es S_p. *Sugerencia: Utiliza que S_p está generado por* (12) *y* $(12\ldots p)$.