ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 9: Formas cuadráticas y cónicas

1. Considera las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ll} \phi_1 : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\leq 4}[x] \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\leq 4}[x] \longrightarrow \mathbb{R}, & \phi_1(p,q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1). \\ \phi_2 : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, & \phi_2(A,B) = \text{traza}(AMB^t), \quad \text{donde } M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ está fijada.} \end{array}$$

Para $i = 1, 2$ se pide:

a) Probar que ϕ_i es una forma bilineal.

b) Hallar la matriz de ϕ_i en la base canónica.

c) Determinar el rango y la inercia de la forma cuadrática Q_i asociada a ϕ_i.

2. Considera las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} Q_1 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, & Q_1(A) = \text{Traza}(A^2) \\ Q_2 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, & Q_2(A) = \det(A) \\ Q_3 : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}, & Q_3(P) = 2P(1)P'(1). \end{array}$$

Para $i = 1, 2, 3$ se pide:

a) Probar que Q_i es una forma cuadrática.

b) Hallar la matriz de Q_i en la base canónica.

c) Determinar el rango y la inercia de Q_i.

3. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 sobre los reales, sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y sea $Q : E \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + \alpha z^2 - 2xy - 2yz$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$.

a) Calcula los valores de α que hacen de Q una forma cuadrática definida positiva.

b) Calcula el índice de inercia positivo de Q en función de α.

4. Determina los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$Q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz + z^2$$

es definida positiva. Determina los valores de α que hace que Q tenga índice de inercia positivo igual a 3.

5. Halla la forma canónica de las siguientes formas cuadráticas:

i. $Q(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^2$.

ii. $Q(x,y,z) = xy + 2xz$.

iii. $Q(x,y,z,t) = xy + yz + zt$.

En cada caso, calcula una base ortonormal en la que se obtenga la forma canónica.

6. Encuentra la forma canónica y los índices de inercia de la siguiente forma cuadrática:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - 2xy + 2xz.$$

Encuentra las ecuaciones de la transformación de $\mathbb{R}^3$ que lleva la forma cuadrática dada a su forma canónica.

7. Determina los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz + z^2$$

es definida positiva. Determina los valores de α que hace que Q tenga índice de inercia positivo igual a 3.

8. Determina los valores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

$$\phi(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + \lambda t^2 + 2\mu xy$$

es degenerada. Calcula el rango y la inercia de ϕ en función de λ y μ.

9. Sea V un espacio vectorial real y $Q : V \to \mathbb{R}$, $Q' : V \to \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo)

a) Existe una única forma bilineal $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u, u)$ para $u \in V$.

b) Existe una única forma bilineal simétrica $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u, u)$ para $u \in V$.

c) Si todos los valores propios de la matriz de Q son positivos, entonces Q es definida positiva.

d) Si Q y Q' son definidas positivas, entonces $Q + Q'$ también es definida positiva.

e) Si Q es indefinida, entonces Q es degenerada.

10. Clasifica las siguientes cónicas y da las ecuaciones del movimiento de $\mathbb{R}^2$ que las lleva a su forma canónica:

a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$

b) $2x - 2x^2 + y^2 + 4xy - 1 = 0.$

c) $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 3 = 0.$

11. Clasifica las cónicas de ecuación

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0$$

para los distintos valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

12. Dado el cono $\mathcal{C}$ de cuación $6x^2 + y^2 = z^2$ y el plano π de ecuación $y = 2z + 3$, calcula la ecuación de la cónica que se obtiene al intersecar $\mathcal{C}$ con π.

13. Halla la ecuación de la hipérbola que tiene un foco en el punto $(2, -1)$ y sus asíntotas son las rectas $x = 0$ y $3x - 4y = 0$.

14. Encuentra las ecuaciones de las siguientes cónicas:

a) La parábola de foco $(1, a)$ y vértice (a, a) dondee $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Demuestra que sólo hay un valor de a para el cual la parábola correspondiente pasa por el origen.

b) La elipse de focos $(0, \mu)$ y $(-\mu, 2)$ y semieje mayor $\sqrt{2}$, donde $\mu \in \mathbb{R}$. Demuestra que existen dos elipses de la familia que pasan por el origen.