ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 8: Geometría afín Euclídea

1. En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ fijamos un sistema de referencia ortonormal $R = \{O; e_1, \ldots, e_n\}$, y sea $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$ un hiperplano $H \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$.

i. Demuestra que el vector $(a_1, \ldots, a_n)$ es ortogonal a cualquier vector en la dirección de H.

ii. Sea $P = (b_1, \ldots .b_n)$ un punto y sea H como en el apartado anterior. Demuestra que

$$d(P, H) = \frac{|a_1b_1 + \ldots + a_nb_b + b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

2. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considera el producto escalar cuya matriz en la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula la distancia del punto $Q = (-1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $A = (1, -1, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ y $C = (4, -5, -2)$ en la referencia $\{O = (0, 0, 0); B\}$.

3. Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cruzan en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sobre el que consideramos el producto escalar usual.

a) Demuestra que existe una única recta L que corta a L_1 y a L_2 y que es ortogonal a ambas.

b) Sean $P_1 = L \cap L_1$ y $P_2 = L \cap L_2$. Demuestra que

$$d(L_1, L_2) = d(P, Q).$$

4. En el espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre las rectas r y s que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases}.$$

Halla un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ tales que $d(r, s) = d(p, q)$. ¿Son únicos los puntos P y Q?

5. El el espacio afín $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre los espacios afines L_1 y L_2 que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z - 3t = 3 \end{cases}.$$

Halla puntos $P \in L_1$ y $Q \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(P, Q)$. ¿Son únicos esos puntos P y Q?

6. Halla una fórmula, en función de α y β, para calcular la distancia entre las rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con su estructura euclídea usual:

$$r := (1, 0, 1) + \langle (1,\ \alpha,\ 0) \rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \langle (1,\ 1,\ \beta) \rangle .$$

7. Encuentra la expresión analítica (o en coordenadas) de las siguientes isometrías del plano:

a) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleve $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

8. Estudia las siguientes isometrías del plano:

$$(a)\begin{cases} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Estudia la isometría composición de las anteriores.

9. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia estándar de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$) de la simetría axial con respecto a la recta $y + x = 1$.

10. Sea $\mathcal{R} = \{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal (con respecto al producto escalar usual) en el plano afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Consideremos los puntos de coordenadas $A = (1, 0)_{\mathcal{R}}$, $B = (0, -1)_{\mathcal{R}}$, $C = (2, 2)_{\mathcal{R}}$ y $D = (-2, -2)_{\mathcal{R}}$.

a) ¿Existe alguna traslación T en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = B$ y $T(C) = D$?

b) ¿Existe alguna simetría axial S en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $S(A) = B$ y $S(C) = D$? ¿Es única? En el caso de respuestas positivas, calcula los elementos geométricos de S.

11. Sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2\}$ una referencia ortonormal y $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})$ un giro de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

a) Escribe la matriz de la aplicación lineal asociada a f.

b) Escribe la expresión en coordenadas de f respecto de $\mathcal{R}$.

c) Calcula la imagen por f del punto $(1, 1)$.

d) Describe geométricamente las imágenes de $(1, 1)$ por todos los giros de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

12. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3$) del movimiento helicoidal de eje la recta $x = y = z$, ángulo de rotación $\theta = \pi$ y vector de traslación $\vec{v} = (3, 3, 3)$.

13. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

a) La reflexión o simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.

b) La rotación helicoidal respecto al eje $\langle(1, -1, 0)\rangle$, con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.

c) La composición de la isometría del apartado a) con la del apartado b).

14. Estudia las siguientes isometrías de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$(a)\begin{cases} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}, \quad (b)\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{cases}$$