ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 7: Geometría afín II. Aplicaciones afines.

1. Sean (A_1, Ψ_1, E_1) y (A_2, Ψ_2, E_2) dos espacios afines, sea $f : A_1 \to A_2$ una afinidad, y sea $\varphi_f : E_1 \to E_2$ su aplicación lineal asociada. Demuestra que:

a) La afinidad f es inyectiva si y sólo si φ_f es inyectiva;

b) La afinidad f es sobreyectiva si y sólo si φ_f es sobreyectiva;

c) La afinidad f es biyectiva si y sólo si φ_f es biyectiva.

2. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideramos los puntos

$$A = (1, 1, 0), B = (2, 0, 2), C = (1, 2, \alpha), D = (3, 4, -1)$$

$$A' = (2, 1, 0), B' = (2, 2, 1), C' = (1, 1, \beta), D' = (3, 0, 0),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ una afinidad tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ y $f(D) = D'$.

a) Sea $X \subset \mathbb{R}$ el conjunto de valores de α para los que se cumple que para todo valor de β, existe una transformación afín con las propiedades descritas en el párrafo anterior. Para cada uno de los valores de α obtenidos, ¿cuántas afinidades distintas se pueden construir?

b) Para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus X$, encuentra los valores de β para los que f es una afinidad. ¿Qué datos adicionales se necesitan para determinar completamente f?

3. Sea $T : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ una afinidad tal que

$$T(1, 1) = (2, 3), \quad T(3, 2) = (3, 8), \quad T(2, 3) = (1, 7).$$

Escribe la expresión en coordenadas de T.

4. Estudia las afinidades de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que dejan fija la hipérbola $xy = 1$.

5. En el espacio afín, determina el lugar geométrico de las imágenes de un punto dado X por todas las afinidades que tienen una recta dada r de puntos fijos y una recta dada s, que se cruza con r, fija.

6. En el plano afín considera todas las afinidades de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + y + \alpha \\ y' &= x + \alpha y + \alpha, \end{aligned}$$

para un parámetro $\alpha \in K$. Determina el lugar geométrico de las imágenes de un punto dado por todas estas afinidades.

7. Sea (A, Ψ, E) un espacio afín de dimensión n y sea $f : A \to A$ una afinidad. Demuestra que si f tiene $n + 1$ puntos fijos afínmente independientes, entonces f es la identidad.

8. Sea (A, Ψ, E) un espacio afín y $h : A \to A$ una homotecia de centro $C \in A$ y razón λ. Demuestra que si $\lambda \neq 1$ entonces C es el único punto fijo de h. ¿Qué ocurre si $\lambda = 1$?

9. Calcula las ecuaciones de la homotecia $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tal que $f(1, 1) = (-3, 0)$ y $f(-1, 0) = (-1, 1)$.

10. Calcula las ecuaciones de la homotecia $f\colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tal que $f(1, 1) = (4, 2)$ y $f(-1, 0) = (-2, -1)$, si existe.

11. Consideramos las rectas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$r_1 \,:\, x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{y} \qquad r_2 \,:\, x = 2y.$$

Calcular la expresión analtica con respecto al sistema referencia estándar de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ de:

a) La simetría sobre r_1 en la dirección de r_2;

b) La proyección sobre r_1 en la dirección de r_2.

12. Sea $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ la aplicación definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(3x - 4y + 8, -4x - 3y + 16).$$

a) Calcula la matriz de f con respecto al sistema referencia estándar de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

b) Demuestra que f es una simetría y calcula los elementos geométricos que la determinan.

13. Sea $f :\ A \to A$ una afinidad, sea $L(f) \subset \mathbb{A}$ el conjunto de puntos fijos por f y sea φ_f la aplicación lineal asociada a f. Demuestra que $L(f)$ es una variedad lineal siguiendo los siguientes pasos:

a) Si $L(f) = \emptyset$ entonces no hay nada que probar;

b) Si $L(f) = \{P\}$ con $P \in A$ entonces no hay nada que probar;

c) Si $L(f) \supsetneq \{P\}$ demuestra que φ_f tiene un autovalor igual a 1 (y por tanto tiene vectores fijos no nulos);

d) Con las mismas hipótesis del apartado anterior, sea $\mathcal{F}$ el subespacio vectorial generado por los autovectores de autovalor 1; demuestra que $L(f) = P + \mathcal{F}$.

14. Ilustra mediante un ejemplo que el recíproco del apartado (c) del ejercicio anterior no tiene por qué ser cierto.

15. Sea $f : A \to A$ una aplicación afín. Se dice que una variedad lineal $L = P + \mathcal{F}$ es invariante por f si para todo $Q \in L$ se tiene que $f(Q) \in L$.

a) Demuestra que si L es invariante por f entonces $\mathcal{F}$ es un subespacio invariante por φ_f;

b) Ilustra mediante, un ejemplo, que el recíproco del apartado anterior no tiene por qué ser cierto.

16. Considera los puntos de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ siguientes:

$$\begin{array}{llll} A_0 = (1,1,1), & A_1 = (2,1,1), & A_2 = (1,2,1), & A_3 = (1,1,2). \\ B_0 = (2,3,1), & B_1 = (3,1,2), & B_2 = (1,5,2), & B_3 = (1,4,3). \end{array}$$

a) Demuestra que A_0, A_1, A_2, A_3 son afínmente independientes;

b) Calcula la matriz con respecto al sistema de referencia estándar de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ de la única afinidad $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que queda definida por las imagenes $f(A_i) = B_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

c) Calcula los puntos fijos de f.

d) Calculas las rectas y planos invariantes por f.

e) Calcula la matriz con respecto al sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}_b = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ de la afinidad f.