

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 6: Geometría afín II. Referencias afines.

1. En \mathbb{A}_k^2 considera los puntos $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2$ cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), & P_1 &= (1, 7), & P_2 &= (1, 1) \\ Q_0 &= (-1, 1), & Q_1 &= (1, 4), & Q_2 &= (3, 0) \end{aligned}$$

a) Demuestra los puntos en $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afinmente independientes. Demuestra que los puntos en $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afinmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a \mathcal{R}'' y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a \mathcal{R}' .

c) Considera los sistemas de referencia cartesiana $\mathcal{R}'_C = \{P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$. Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a \mathcal{R}'_C y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a \mathcal{R}''_C .

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre \mathcal{R}'_C y \mathcal{R}''_C .

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre \mathcal{R}' y \mathcal{R}'' .

2. Sean $A = (1, 1, 1), B = (1, 2, 3), C = (2, 3, 1)$ y $D = (3, 1, 2)$ cuatro puntos en \mathbb{A}_k^3 con coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia \mathcal{R} .

a) Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.

b) Calcula las coordenadas cartesianas respecto a \mathcal{R} del baricentro de A, B, C, D .

c) Si $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a \mathcal{R}' .

3. Sean $O \in \mathbb{A}_k^2$ un punto, y sean \vec{u} y $\vec{v} \in K^2$ dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ , se le asocian los puntos A y B tales que

$$\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \lambda \vec{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ .

4. En \mathbb{A}_k^3 se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}, \text{ y } \mathcal{R}' = \{O', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sean $O'_R = (-1, 6, 2)$, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$, $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$. Si un plano π tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en \mathcal{R} , halla su ecuación respecto a \mathcal{R}' .

5. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que pasa por la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y por el punto $P = (-1, -2, 5)$.

6. Demuestra que en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

7. En el espacio afín real se consideran tres rectas que se cruzan dos a dos y son paralelas a un plano. Demuestra que toda recta que corte a las tres es paralela a un plano fijo. Determina ese plano.