ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 5: Geometría afín I.

1. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 1\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

a) Demuestra que B y C son variedades lineales (es decir, escribe cada una de ellas de la forma $p+W$, donde $p \in A$ y W subespacio de $V = \mathbb{R}^3$; en realidad p es un punto cualquiera en la variedad y W es el espacio generado por sus vectores directores).

b) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

2. En $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z, w) : x = 1, y = 2\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z, w) : z = -2, w = 3\}.$$

a) Demuestra que B y C son variedades lineales.

b) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

3. Demuestra que un subconjunto H del espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ es una variedad lineal si y sólo si *para todo par de puntos de H la recta que los une está contenida en H*.

4. Sea $T := \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x + y = n\}$. Decide, de manera razonada, si el conjunto T es una subvariedad lineal de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

5. Decide, de manera razonada, si los siguientes resultados son verdaderos o falsos:

a) Dos rectas paralelas en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ o bien son coincidentes, o bien no se cortan.

b) Dos rectas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que no se cortan deben ser paralelas.

c) En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ con $n \geq 3$ dos rectas que no se cortan no tienen por qué ser paralelas.

6. En el plano afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_3}$:

a) ¿Cuántos puntos hay?

b) ¿Cuántas rectas hay?

c) ¿Cuántos puntos tiene cada recta?

d) ¿Cuántas rectas hay que sean paralelas a una dada?

e) ¿Cuántos haces diferentes de rectas paparelas hay?

7. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$r := \{(1, 0, 1)\} + \langle(1, \alpha, 0)\rangle, \quad \text{y} \quad s := \{(1, 1, 2)\} + \langle(1, 1, \beta)\rangle.$$

a) Estudia la posición relativa r y s dependiendo de los valores de α y β.

b) Describe la variedad lineal $r + s$ dependiendo de los valores de α y β.

8. En el espacio afín $\mathbb{A}^3_K$ estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$t := \{(1,0,0)\} + \langle(0,2,1)\rangle, \quad \text{y} \quad w := \{(x,y,z) : x + 2y + z = 1\}$$

dependiendo de la característica del cuerpo base K. En caso de incidencia, describe la variedad lineal intersección y suma.

9. Considera un siguiente sistema de ecuaciones lineales no necesariamente homogéneo:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Observa que el conjunto de soluciones del sistema determina una subvariedad lineal de $\mathbb{A}^3_k$. Interpreta geométricamente el hecho de que *el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal se puede describir como una solución particular del sistema, más el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado.*

10. Sean L y M dos variedades lineales de $\mathbb{A}^n_k$ con $L + M = \mathbb{A}^n_k$ y $L, M \neq \mathbb{A}^n_k$, y supongamos que las dimensiones de L y M son las mínimas posibles con estas propiedades. Describe las dimensiones de L y M así como su posición relativa en el caso de $n = 2, 3$ y 4. Conjetura un resultado para n arbitrario y demuéstralo.

11. Determina el espacio afín de $\mathbb{A}^5_{\mathbb{R}}$ generado por los puntos:

$$P_1 = (-1, 2, -1, 0, 4) \quad P_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$$

$$P_3 = (4, -2, 0, 0, -3) \quad P_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$$

12. Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Demuestra que estos planos tienen una recta en común.

b) Determina los planos de la familia que pasan por el punto $(1, -1, 2)$.

c) Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta:

$$L := \{x + 3z - 1 = 0, y - 5z + 2 = 0\}.$$

13. Encuentra la recta que corta a las rectas

$$s = \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad t = \left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{array} \right. ,$$

y pasa por $P = (1, 6, -3)$.

14. Consideremos las rectas $L_1 = \{x + y + z = x + 2y = 0\}$, $L_2 = \{2x + 2y + z = 3,\ x + y = 2\}$ y $L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2,\ 2x + y + z = 0\}$ del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Demuestra que se cruzan dos a dos.

b) ¿Existe algún plano π paralelo a las tres rectas?