ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 4. Espacios Euclídeos y Unitarios IV. Aplicaciones ortogonales y unitarias.

1. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual y $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,1)\}$ es

$$M_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix} \qquad M_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1 & -2\\ 1 & 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Determina en qué caso f es ortogonal.

2. Encuentra las ecuaciones de la simetría (ortogonal) respecto al plano $2x+y+z=0$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Encuentra la expresión analítica de las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$:

a) La simetría respecto a la recta $2x+y=0$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$.

4. Decide de manera razonada si los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ son aplicaciones ortogonales con el producto escalar usual y en caso afirmativo clasifícalos e indica sus elementos geométricos:

a) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$

5. Calcular la matriz en la base cannica de $\mathbb{R}^3$ de:

a) La simetría respecto del plano $x=y$;

b) La simetría respecto al plano $2x+y+z=0$;

c) Giro de amplitud $\pi/2$ con eje $u=(0,1,1)$, con la orientación dada por el vector u.

6. Decide de manera razonada si los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ son aplicaciones ortogonales con el producto escalar usual y en caso afirmativo clasifícalos e indica sus elementos geométricos:

a) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = z \\ y' = -y \\ z' = -x. \end{cases}$

7. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$:

a) Encuentra la expresión en coordendas de la simetría ortogonal respecto a la recta $l=\{x-iz=0, y=0\}$. ¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

b) Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l=\{x-(1+i)z=0,\ y=0\}$. ¿Es autoadjunta?

8. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Decide de manera razonada el resultado de componer:

a) Dos rotaciones en V;

b) Dos simetrías en V;

c) Una rotación con una simetría.

9. Sea f la simetría respecto al eje $\langle(a, b, c)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $f(v) + v$ es o bien $\vec{0}$ o bien un vector propio de valor propio 1.

b) Usa el apartado anterior para calcular la matriz de f en función de a, b, c.

c) Usa el apartado anterior para hallar las ecuaciones de la rotación de ángulo π respecto al a recta intersección de los planos $3x - 4y = 0, z = 0$.

10. En $\mathbb{R}^3$ considera la simetría g respecto al plano de ecuación $ax + by + cz = 0$.

a) Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $g(v) - v$ es ortogonal al plano de simetría.

b) Calcula la matriz de g en función de a, b, c.

c) Halla las ecuaciones de la simetría respecto al plano $x + 2y - 3z = 0$.

11. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : V \to V$ una función que conserva el producto escalar, i.e., para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$. Demuestra que f es necesariamente lineal. *Sugerencia: Basta probar que* $\|f(u + v) - f(u) - f(v)\|^2 = 0$ *y que* $\|f(\lambda u) - \lambda f(u)\|^2 = 0$ *para* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y para todo par de vectores* $u, v \in V$.

12. Sea V un espacio euclídeo (respectivamente, unitario) de dimensión n sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y sea

$$O(n, \mathbb{K}) := \{f : V \to V : f \text{ es ortogonal (respectivamente unitaria)}\}.$$

a) Demuestra que $O(n, \mathbb{K})$ es un conjunto no vacío;

b) Demuestra que $O(n, \mathbb{K})$ es un grupo con la composición (que recibe el nombre de *grupo ortogonal*);

c) Decide de manera razonada si $O(n, \mathbb{K})$ es un grupo abeliano;

d) Definimos

$$SO(n, \mathbb{K}) := \{f : V \to V : f \text{ es ortogonal (respectivamente unitaria): det(f)=1}\}.$$

Demuestra que $SO(n, \mathbb{K})$ es un subgrupo de $O(n, \mathbb{K})$ (recibe el nombre de *grupo ortogonal especial*).

13. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo α. Determina la adjunta de h. ¿Es h ortogonal?

14. Sea l una recta (un subespacio vectorial de dimensión 1) en $\mathbb{R}^2$ donde consideramos el producto escalar usual. Demuestra que la simetría ortogonal respecto a l es una aplicación ortogonal.

15. Sea $W \subset V$ un subespacio no nulo de un vectorial euclídeo o unitario de un espacio V de dimensión $n \geq 1$. Sea $f : V \to V$ la simetría respecto a W con dirección un cierto subespacio W'. Demuestra que f es una aplicación ortogonal (o unitaria) si y sólo si la simetría es ortogonal. (i.e., f es ortogonal -o unitaria- si y sólo si $W' = W^\perp$).

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Fijada una base B de V se define la traza de f como la traza de la matriz $M_B(f)$. Demuestra que la traza de f no depende de la base B fijada. *Sugerencia: Cualquier cambio de base es de la forma* $M_{BB'}^{-1} M_B(f) M_{BB'}$. *Ahora usa que para todo par de matrices cuadradas,* A, C, *de orden* n, *Traza*$(AC) =$ *Traza*(CA).