ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 3. Espacios Euclídeos y Unitarios III. Aplicaciones adjuntas.

1. Encuentra la aplicación adjunta de:

a) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) La misma aplicación del apartado (a) con el producto escalar del ejercicio 6 de la hoja 2.

c) Con la notación y el producto escalar del ejercicio 5 de la hoja 2, la aplicación $g : V_2 \to V_2$ dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$.

d) La aplicación $T : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t + A$ con el producto escalar del ejercicio 10 de la hoja 1.

2. Sea V un espacio vectorial euclídeo o unitario y sean $I_V, f, g : V \to V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra que:

a) $\widetilde{I_V} = I_V$;

b) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$;

c) $\widetilde{f + g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$;

d) $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$;

e) Si f es biyectiva, entonces $\widetilde{f^{-1}} = (\widetilde{f})^{-1}$;

f) $(\text{Im } f)^{\perp} = \text{Ker}\widetilde{f}$;

g) $(\text{Ker}f)^{\perp} = \text{Im } \widetilde{f}$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $f, g : V \to V$ dos aplicaciones autoadjuntas. Decide de manera razonada si la composición $f \circ g$ es autoadjunta.

4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P^2 = P$. El subespacio Ker P es la *dirección de la proyección* y el subespacio Im P es el *subespacio sobre el que se proyecta.*

a) Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable.

b) Demuestra que $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

c) Si V es euclídeo o unitario, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\ker P$ es ortogonal a $\text{Im}P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con $\text{Im } P = W$. Demuestra que lass proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

d) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Prueba que* $(Pu, v) = (Pu, Pv)$.

5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $S : V \to V$ es una simetría si $S^2 = I_V$. El subespacio $W_1 = \mathrm{Ker}(S + I_V)$ es la *dirección de la simetría* y el subespacio $W_2 = \mathrm{Ker}(S - I_V)$ es el *subespacio respecto al que se hace la simetría.*

a) Demuestra que una simetría siempre es diagonalizable.

b) Demuestra que $V = \mathrm{Ker}(S + I_V) \oplus \mathrm{Ker}(S - I_V)$.

c) Observa que cada $u \in V$ se escribe de manera única como la suma de un vector en W_1 y otro en W_2, i.e., $u = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Demuestra que $S(u) = w_1 - w_2$.

d) Supongamos que es V un espacio vectorial euclídeo o unitario. Demuestra que una simetría es autoadjunta si y sólo si $W_1 \perp W_2$ (cuando $W_1 \perp W_2$ se dice que la simetría es ortogonal).

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^n$ es simétrica. Demuestra que f es diagonalizable en una base ortonormal.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base estándar de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de f sea diagonal.

8. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ la aplicación que a cada matriz A le asocia su traspuesta, i.e., $f(A) = A^T$. Demuestra que existe una base ortonormal en la que f es diagonalizable. Encuentra esa base.