ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 2. Espacios Euclídeos y Unitarios II. Ortogonalidad. Gram-Schmidt. Complementos ortogonales. Proyecciones ortogonales.

1. Sea $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

2. Sea V un espacio vectorial euclídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por φ. Sean $u, v \in V$. Demuestra que:

a) Los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$. ¿Vale la equivalencia si V es unitario?

b) Los vectores u y v son ortogonales si y sólo si $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (en un espacio vectorial normado dos vectores son *ortogonales en el sentido de Birkhoff* si satisfacen esta condición).

c) ¿Vale la equivalencia anterior en un espacio unitario?

3. Sea V un espacio euclídeo o unitario. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 ,$$

si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ son ortogonales dos a dos.

4. Sea V un espacio unitario con producto escalar φ. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz: para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$|\varphi(u, v)|^2 \leq \varphi(u, u)\varphi(v, v).$$

5. Sea $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. En $V_n \times V_n$ considera la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

c) Para $n = 3$ calcula una base ortogonal de V_3.

d) ¿Cómo definirías el producto escalar análogo en $W_n := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$para un cierto $n \in \mathbb{N}$?

6. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ sea diagonal.

7. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que φ es un producto escalar.

b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ.

8. Sean $u_1 = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ y $u_3 = (1, -1, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

9. Calcula el complemento ortogonal de la recta

$$L := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

respecto al producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

y respecto al producto escalar usual.

10. En $\mathbb{R}^3$ encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $x = 0$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único ese producto escalar?

11. Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de $\mathbb{R}^3$, $l = \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$. Usa el producto escalar usual.

12. Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$. Usa el producto escalar usual.

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz en una base $B = \{w_1, w_2, w_3\}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal del vector con coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto a la base B sobre el plano $\{y + z = 0\}$.

14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en una base ortonormal B es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es una proyección ortogonal sobre la recta $ax + by = 0$, donde $\alpha = b^2/(a^2 + b^2)$ y $\beta = -ab/(a^2 + b^2)$.

15. Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las matrices cuadradas de orden 2. Usando el producto escalar del ejercicio 10 (b) de la hoja 1, encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.