

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

CURSO 2023-24

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Descripción general

El objetivo de este curso es aprender las técnicas utilizadas en el tratamiento de señales usando la transformada de Fourier y los sistemas de ondículas. Se realizarán prácticas de ordenador sobre tratamiento de imágenes y señales de audio. En la última parte del curso, discutiremos algunos resultados relacionados con cuasicristales y medidas cristalinas.

Programa de la materia

1. Análisis de Fourier

- i) La transformada de Fourier discreta.
- ii) FFT y principios de incertidumbre (discretos).
- iii) Series de Fourier.
- iv) Transformada de Fourier.
- v) Fórmula de Poisson y principio de incertidumbre.

2. El Teorema de Muestreo y sus variantes

- vi) Teorema de muestreo de Shannon y espacio de Paley-Wiener.
- vii) Sucesiones de muestreo e interpolación.
- viii) Teorema de Landau (Frecuencia de Nyquist).
- ix) Espacios invariantes por traslaciones
- x) Muestreo e interpolación de señales multibanda.

3. Ondículas

- xi) Ondículas continuas: admisibilidad de Calderón y detección de singularidades.
- xii) Ondículas de Haar y de Shannon.
- xiii) Análisis en Multirresolución I: aproximación, detalle y la función de escala.
- xiv) Análisis en Multirresolución II: el teorema de completitud y el filtro paso bajo de una MRA.
- xv) Análisis en Multirresolución III: el filtro de paso alto y las MRA ortonormales de Mallat.
- xvi) Análisis en Multirresolución IV: ondículas de soporte compacto y el algoritmo de descomposición.

4. Medidas cristalinas

- xvii) Repaso sobre conjuntos integrales Riemann.
- xviii) Método “cut and project” y la definición de los conjuntos modelos.
- xix) Propiedades de separación de los conjuntos modelos.
- xx) Fórmulas de Poisson generalizadas.
- xxi) Medidas cristalinas definición y el ejemplo de Meyer-Kolountzakis.

Referencias

- E. Candes, J. Romberg, T. Tao, Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006.
- O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser/Springer, 2016
- I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- D. L. Donoho and P. B. Stark. *Uncertainty principles and signal recovery*, *Siam J. Appl. Math*, 1989.
- K. Gröchenig. *Foundations of time-frequency analysis*. Springer, 2001.
- E. Hernández, G. Weiss. *A first course on wavelets*. CRC Press, 1996.
- M. Kolountzakis, *Fourier pairs of discrete support with little structure*, *JFAA* 2016.
- A. Kulikov, *Fourier Interpolation and Time-Frequency Localization*, *JFAA* 2021.
- S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 3rd ed. 2009.
- Y. Meyer, *Measures with locally finite support and spectrum*. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2016.
- A. Oleviskii, A. Ulanovskii, *Functions with Disconnected Spectrum: Sampling*, AMS, 2016.
- M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, 1980.
- W. Rudin, *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- E. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis. An introduction*, Princeton University Press, 2003.
- T. Tao, *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order*, *Math. Res. Letters*, 2005.
- P. Van Fleet. *Discrete wavelet transformations*. Wiley, 2008.
- R. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press, 2001