Profesor: José Manuel Conde Alonso

Contenido del curso: La idea del curso es hacer una introducción al análisis armónico clásico desde un punto de vista moderno, empleando técnicas probabilísticas. En el primer bloque se desarrollan las herramientas probabilísticas que se van a usar y se introduce la martingala diádica como caso particular. En el segundo bloque aparecen los operadores de Calderón-Zygmund y se estudian sus teoremas clásicos de acotación, con énfasis en el uso de técnicas probabilísticas donde se puede. El tercer bloque trata multiplicadores de Fourier en $\mathbb{R}^n$ y los criterios de suavidad clásicos para sus símbolos. En el cuarto y último bloque se traslada al contexto no conmutativo parte de lo anteriormente estudiado, lo que permite culminar el curso estudiando multiplicadores de Fourier en grupos generales y sus relaciones con preguntas de teoría geométrica de grupos. Se ha escrito el temario de manera que cada sub-bloque del mismo se corresponda aproximadamente con una semana del curso (hay 14 epígrafes en total).

- **Bloque 1.** Técnicas probabilísticas
  1. Martingalas en L^p y BMO
  2. Desigualdades de martingalas
  3. La martingala diádica en $\mathbb{R}^n$

  Posibles trabajos de fin de curso: martingalas en dos parámetros, martingalas en espacios de Banach, espacios de Hardy de martingalas
- **Bloque 2.** Análisis armónico en $\mathbb{R}^n$ I. Teoría de Calderón-Zygmund
  1. Operadores de Calderón-Zygmund. Ejemplos
  2. Acotación de operadores de Calderón-Zygmund en L^p: descomposición de Calderón-Zygmund y estimaciones BMO
  3. Teoría de Littlewood-Paley
  4. Algunas técnicas probabilísticas en $\mathbb{R}^n$

  Posibles trabajos de fin de curso: medidas no doblantes, dominación sparse, análisis con medidas gaussianas
- **Bloque 3.** Análisis armónico en $\mathbb{R}^n$ II. Multiplicadores de Fourier
  1. Ejemplos
  2. Criterios de acotación: el teorema de Hörmander-Mikhlin
  3. Acotación con símbolos en espacios de Sobolev

  Posibles trabajos de fin de curso: multiplicadores no suaves, operadores direccionales
- **Bloque 4.** Análisis armónico no conmutativo
  1. Álgebras de von Neumann. Espacios L_p no conmutativos
  2. Martingalas no conmutativas. Probabilidad libre
  3. Descomposición de Calderón-Zygmund con valores en matrices
  4. Multiplicadores de Fourier en grupos

  Posibles trabajos de fin de curso: BMO no conmutativo, espacios de Hardy con valores en operadores, propiedades de aproximación en grupos

Estructura del curso y evaluación: Al final de cada semana o bloque, se propondrán lecturas que preparen lo que se cubrirá en clase en la siguiente. Se darán ejercicios sobre los temas tratados al menos al final de cada bloque, animando a los estudiantes a trabajar en común.
La evaluación constará de tres partes:

(i) (Principal) Elaboración por parte de cada alumno de un trabajo breve sobre un tema a convenir con el profesor, que incluirá la consulta de alguna referencia de nivel investigación (se han incluido sugerencias de ejemplo en cada bloque del temario). El trabajo se defenderá después delante del profesor y del resto de estudiantes de la clase.
(ii) Entrega de ejercicios, que se darán con cada tema.
(iii) Edición/mejora por cada estudiante de un artículo de la enciclopedia online Wikipedia relacionado con la temática elegida para el trabajo.

Bibliografía: Los siguientes son textos de referencia cuya unión cubre la práctica totalidad de lo que se va a ver en clase (en cada uno se indica con qué bloques del curso está relacionado). Todas las referencias están en la biblioteca del departamento o en la de Ciencias, salvo tres (Lerner/Nazarov, Parcet y Xu), que son de libre acceso y serán proporcionadas a los estudiantes. Todas salvo una están escritas en, o traducidas al, inglés, lo que permite que el curso se dé en esa lengua sin necesidad de hacer ningún cambio.

[1] J. Duoandikoetxea, Análisis de Fourier. Addison-Wesley, 1995, *bloques 1 y 2*.
[2] G.B. Folland, A course in abstract harmonic analysis. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1995, *bloque 4*.
[3] A.M. Garsia, Martingale inequalities: Seminar notes on recent progress. W. A. Benjamin, 1973, Mathematics Lecture Notes Series, *bloque 1*.
[4] L. Grafakos, Fourier analysis. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2008, *bloque 2*.
[5] L. Grafakos, Modern Fourier analysis. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 250. Springer, New York, 2009, *bloque 3*.

[6] A. Lerner, F. Nazarov, Intuitive dyadic calculus: the basics. Expo. Math. 37 (2019), no. 3, 225-265, *bloques 1 y 2*.

[7] J. Parcet, Teoría de Littlewood-Paley. Martingalas, semigrupos y aspectos no conmutativos. Notas disponibles en `https://www.icmat.es/miembros/parcet/parcet_ICMAT/Papers.html`, *bloques 1 y 4*.

[8] E.M. Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1970, *bloques 2 y 3*.

[9] E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 1970, *bloque 2*.

[10] Q. Xu, Noncommutative L_p spaces. Libro en preparación, *bloque 4*.

Las siguientes se pueden considerar lecturas complementarias, de nivel similar pero espectro más amplio. Para los trabajos se dará bibliografía específica a los estudiantes.

- G. Folland, Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- J. García-Cuerva, J.L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland Mathematics Studies, 116, Amsterdam, 1985.
- R.V. Kadison y J.R. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I y II. Grad. Stud. Math. 15 y 16, American Mathematical Society, 1997.
- P.A. Meyer, Quantum Probability for Probabilists. Lecture Notes in Mathematics 1538, 1995.
- C. Muscalu, W. Schlag, Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. I. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 137. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- C. Muscalu, W. Schlag, Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. II. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 138. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- G. Pisier y Q. Xu, Non-Commutative L_p Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces II (Ed. W.B. Johnson y J. Lindenstrauss) North-Holland (2003), 1459-1517.
- E.M. Stein, Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton Mathematical Series, 43. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- X. Tolsa, Analytic capacity, the Cauchy transform, and non-homogeneous Calderón-Zygmund theory. Progress in Mathematics, 307. Birkhäuser/Springer, Cham, 2014.
- D.V. Voiculescu, K. Dykema y A. Nica, Free random variables. CRM Monograph Series 1, American Mathematical Society, 1992.
- F. Weisz, Martingale Hardy Spaces and its Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Math. 1568, Springer-Verlag, 1994.

Complementos: Se ha invitado a los siguientes ponentes (que han aceptado) a dar una o dos charlas adicionales cada uno:

- **Adrián González** (UAM): condiciones de suavidad en espacios de Sobolev (al final del bloque 3).
- **Javier Parcet** (ICMAT-CSIC): multiplicadores de Fourier en grupos no conmutativos (al final del bloque 4).

Estas charlas tendrán un carácter divulgativo y de ampliación en el curso y tendrán estructura de *coloquio para estudiantes*.