Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2024-25

PROFESOR: Ernesto Girondo Sirvent

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 3

1.- TEMA: Automorfismos de superficies de Riemann compactas

Válido para **2 estudiantes**.

Resumen/contenido: La topología de una superficie de Riemann compacta X (variedad compacta bidimensional con un atlas holomorfo) está totalmente determinada por el género g. En el caso g>1 el conjunto de las simetrías (automorfismos) de X forma un grupo finito G. Es bien conocido que todo grupo finito puede realizarse como grupo de automorfismos de alguna superficie de Riemann compacta, si bien la topología impone algunas restricciones severas. Por ejemplo, el orden de G no puede exceder el valor 84(g-1) (cota universal de Hurwitz, que aunque se alcanza para una cantidad infinita de valores de g, no es óptima también para infinitos g's), y ningún automorfismo puede tener orden mayor que 4g+2.

La primera parte del trabajo requerirá familiarizarse con algunos fundamentos básicos de la teoría de superficies de Riemann. Después, y dado que la literatura sobre automorfismos es enorme, se hará una selección de contenidos adaptada a los intereses de cada cual. En particular, este TFG puede enfocarse de formas muy diversas, desde centrarlo en comprender los resultados más clásicos hasta tratar de considerar trabajos recientes o incluso llegar a plantear problemas aún abiertos. El nivel de dificultad se adaptará también a las circunstancias, motivación e intereses de cada persona.

Requisitos: No se requiere ningún conocimiento que quede fuera de las asignaturas obligatorias del grado. Por otra parte, se usarán distintos ingredientes de variable compleja, geometría y teoría de grupos, así que este TFG será adecuado para estudiantes con afinidad por estas áreas de las matemáticas.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles:

Bibliografía/referencias:

- El volumen *Automorphisms of Riemann Surfaces, Subgroups of Mapping Class Groups and Related Topics* (Contemporary Mathematics 776, editado por Aaron Wootton, S. Allen Broughton y Jennifer Paulhus), publicado por la AMS en 2022, contiene dos surveys excelentes sobre este tema, cubriendo desde los resultados más clásicos hasta los problemas abiertos. Los títulos son *The engaging symmetry of Riemann surfaces: a historical perspective* (S.A. Broughton, G.A. Jones y D. Singerman) y *Future directions in automorphisms of surfaces, graphs, and other related topics* (S.A. Broughton, J. Paulhus y A. Wootton): la lista de referencias de ambos artículos es muy extensa e incluye trabajos sobre casi cualquiera de los aspectos específicos de la teoría.

- Por otra parte, la conferencia *Automorphism groups of compact Riemann surfaces*, de J. Paulhus, que puede verse en https://youtu.be/WoNfkCCT4cE?feature=shared, contiene muchos ingredientes avanzados interesantes.

- Tres videos, de poco más de 10 minutos de duración cada uno, que introducen de manera informal pero excelente algunos elementos importantes que intervienen en la teoría de superficies de Riemann compactas (curvas algebraicas, geometría hiperbólica): *The shocking connection between complex numbers and geometry* , https://youtu.be/5RHSS-zMaAQ?feature=shared,; *Non-Euclidean Geom. Explained*, https://youtu.be/zQo_S3yNa2w?feature=shared); *Illuminating hyperbolic geometry*, https://youtu.be/eGEQ_UuQtYs?feature=shared.

2.- TEMA: Grupos fuchsianos aritméticos

Válido para **1 estudiante**.

Resumen/contenido: Un grupo fuchsiano K es un subgrupo discreto del grupo PSL(2,R) de las transformaciones de Möbius con coeficientes reales, que actúan sobre el semiplano superior H justamente como las isometrías de la métrica hiperbólica. El espacio cociente H/K es una superficie de Riemann: una variedad bidimensional con una estructura compleja y una métrica, de curvatura constante y negativa, inducidas desde el plano hiperbólico H.

Los llamados grupos aritméticos son una clase de grupos fuchsianos especialmente interesante, definidos en base a ciertas construcciones aritméticas. El trabajo consistirá primero en comprender qué son y cómo se caracterizan los grupos fuchsianos artiméticos y, en función del tiempo y el interés de el/la estudiante, cubrir quizá algunos aspectos más avanzados.

Requisitos: No se requiere ningún conocimiento que quede fuera de las asignaturas obligatorias del grado. Es bueno tener cierto gusto por el álgebra (sobre todo) y la geometría, pues son estas las áreas relacionadas con este tema.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles:

Bibliografía/referencias:

- S. Katok. *Fuchsian Groups*. Chicago Lectures in Mathematics, 1992.

- C. Maclachlan. Introduction to arithmetic fuchsian groups. En Topics on Riemann Surfaces and Fuchsian Groups (ed. E. Bujalance, A.F. Costa y E. Martínez). CUP.

- K. Takeuchi. A characterization of arithmetic fuchsian groups. J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 600-612.

- K. Takeuchi. Arithmetic triangle groups. J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 91-106.

- K. Takeuchi. Commensurability clases of arithmetic triangle groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24 (1977), no. 1, 201–212.