Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2024-25

PROFESOR: Dragan VUKOTIC JOVSIC

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 3

1.- TEMA: **Álgebras de Banach: introducción**.

Válido para **1 alumno**.

Resumen/contenido:

0) **Repaso de la integral de Lebesgue**. Medidas producto y convoluciones. Los espacios de Lebesgue, L^p. **Repaso del análisis funcional**. Espacios de Hilbert y de Banach. Operadores y funcionales lineales acotados. Principios básicos del análisis funcional.
1) **Primeras nociones de álgebras de Banach**. Definición y primeras propiedades. Ejemplos relevantes de álgebras de Banach (de funciones y de operadores). Elementos invertibles, serie de von Neumann. Propiedades de la inversión. Uso de las funciones holomorfas. Espectro de un elemento y sus propiedades. Teorema de Banach-Mazur. Radio espectral. Aplicaciones: álgebra de operadores lineales acotados en un espacio de Banach, rudimentos de la teoría espectral de operadores.
2) **Álgebras conmutativas de Banach**. Homomorfismos complejos y su acotación. Ideales. Espacios y álgebras cocientes. Ideales maximales y su descripción como núcleos de homomorfismos. Aplicaciones a álgebras de funciones continuas. Teorema de Wiener.
3) **El álgebra de Banach $L^1(\mathbf{R})$.** Transformada de Fourier: definición, primeras propiedades, ejemplos. Convoluciones con ciertas funciones relevantes. Teoremas relevantes acerca de la transformada de Fourier. La convolución como multiplicación y el álgebra conmutativa de Banach $L^1(\mathbf{R})$. La transformada de Fourier como isomorfismo sobre un álgebra de funciones continuas. Homomorfismos complejos de $L^1(\mathbf{R})$.
4) **Temas optativos**. Teorema de Gleason, Kahane y Zelazko. Transformada de Gelfand y sus propiedades. Cálculo simbólico. Integrales con valores vectoriales. Teorema de la aplicación espectral. Operadores compactos y su teoría espectral. Existencia de subespacios invariantes; teorema de Lomonosov. Álgebras con involuciones, álgebras C^*, teorema de Gelfand-Naimark.

Requisitos: *Este trabajo requiere ciertos conocimientos básicos del análisis funcional, de la teoría de la medida y de espacios de Lebesgue*.

Nivel de dificultad: medio/alto (recomendable sólo para estudiantes con un buen expediente y con interés en Análisis Matemático).

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Análisis Funcional, Análisis Real.

Bibliografía/referencias:

1) R.G. Douglas: *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Segunda edición, Springer-Verlag, Nueva York 1998.
2) W. Rudin: *Real and Complex Analysis*. Tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York 1987.
3) W. Rudin: *Functional Analysis*. Segunda edición, McGraw-Hill, Nueva York 1991.

2.- TEMA: **La integral de Riemann-Stieltjes y aplicaciones.**

Válido para **1 alumno**.

Resumen/contenido:

1) **Funciones de variación acotada**. Funciones monótonas y sus discontinuidades. Variación total, funciones de variación acotada y su representación como diferencia de dos funciones monótonas. Longitud de arco, curvas rectificables, ejemplos.
2) **Integral de Riemann-Stieltjes**. Definición, integrando e integrador. Ejemplos y propiedades básicas. Integración por partes. Cambio de variable en la integral de Riemann-Stieltjes. Reducción a la integral de Riemann. Funciones escalonadas como integradores. Fórmula de sumación de Euler. Funciones monótonas y de variación acotada como integradores. Condiciones necesarias y condiciones suficientes para la existencia de la integral de R-S.
3) **Teoremas adicionales sobre la integral R-S**. Integral como función de intervalo, teorema del valor medio y teoremas fundamentales del cálculo para la integral de R-S. Integrales que dependen de un parámetro; derivación bajo el signo de la integral. Intercambio de orden de integración. Criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemann. Integrales de R-S con valores complejos.
4) **Teoremas de tipo Riesz**. Representación de los funcionales lineales continuos en el espacio de funciones continuas. Algunas generalizaciones.
5) **Temas adicionales (optativos)**. Teorema de selección de Helly. Convergencia débil-*; teorema de Banach-Alaoglu. Teorema de representación de Herglotz para las funciones analíticas con parte real positiva. Lema de Féjer: polinomios trigonométricos con parte real positiva. El núcleo de Poisson y sus propiedades. La integral de Poisson-Stieltjes y la clase de Hardy de funciones armónicas. Derivada simétrica. Teorema de Fatou: existencia de los límites radiales para las funciones analíticas acotadas.

Requisitos: *Buen conocimiento de Cálculo I y II y de la Teoría de la integral y la medida*. *Nivel: mediano (adaptable a un nivel más avanzado).*

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Análisis Real, Análisis Funcional, Variable Compleja II.

Bibliografía/referencias:

1) T. Apostol: *Mathematical Analysis*. Segunda edición, Addison-Wesley, Reading, MA 1974.
2) P. D. Lax: *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, Nueva York 2002.
3) L. F. Richardson: *Advanced Calculus: Introduction to Linear Analysis*, Wiley-Interscience, Hoboken, NJ 2008.
4) W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Nueva York 1976.

3.- TEMA: **Trabajo genérico en Análisis**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: Se podrán abordar temas de Análisis Real, Complejo o Funcional y otros relacionados, relativos a la integración, aproximación o aplicaciones conformes. Tanto el contenido del trabajo como el ritmo de trabajo podrán adaptarse a la situación individual de la persona interesada.

Requisitos: En general, un buen dominio de las asignaturas de Cálculo y/o Análisis Matemático y alguna de las asignaturas de tercero como Variable Compleja I, Topología y Teoría de la Integral y la Medida.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Variable Real, Variable Compleja II o Análisis Funcional, dependiendo del temario elegido.

Bibliografía/referencias: Dependerá del temario.