

## Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2023-24

**PROFESOR:** Fernando CHAMIZO LORENTE

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 4

### 1.- TEMA: **La evaluación de algunas series de la teoría de números**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: En su versión básica, el trabajo consistirá en evaluar un valor especial de la función theta de Jacobi y probar una fórmula famosa de Ramanujan. Con este fin, aparecerán la fórmula límite de Kronecker y propiedades de las funciones zeta y Gamma. En su versión extendida, se estudiarán otras series y métodos de suma de la teoría de números.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Variable Compleja II y Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Armitage, J. V.; Eberlein, W. F. Elliptic functions. London Mathematical Society Student Texts, 67. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- Berndt, B. C. Ramanujan's Notebooks Part III. Springer-Verlag, New York 1991.
- Chamizo, F. A simple evaluation of a theta value, the Kronecker limit formula and a formula of Ramanujan. *Ramanujan J.* 59 (2022), no. 3, 947–954.
- Stein, E. M. and Shakarchi, R. Complex analysis, volume 2 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

### 2.- TEMA: **El teorema de las tres distancias**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: Este curioso resultado (*three gap theorem* en inglés) afirma que al aplicar sucesivamente un giro a un punto de la circunferencia unidad los huecos entre las imágenes pueden tener a lo más tres longitudes diferentes. El trabajo consiste en estudiar diferentes pruebas y temas relacionados.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Biringer, I.; Schmidt, B. The three gap theorem and Riemannian geometry. *Geom. Dedicata* 136 (2008), 175–190.
- Marklof J.; Strömbergsson, A. The three gap theorem and the space of lattices. *Amer. Math. Monthly* 124 (2017), no. 8, 741–745.
- Mozzochi, C. J. A proof of Sarnak's golden mean conjecture. *J. Number Theory* 214 (2020), 56–62.
- van Ravenstein, T. The three gap theorem (Steinhaus conjecture). *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 45 (1988), no. 3, 360–370.

### 3.- TEMA: **El efecto Talbot en la teoría de la difracción**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: Inicialmente se estudiarán los modelos matemáticos que fundamentan la difracción. La parte central del trabajo consistirá en explicar el efecto Talbot (la autosemejanza de los patrones de difracción) explotando la relación con las sumas trigonométricas y algunos temas de teoría de números.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Variable Real y Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Berry, M. V.; Klein, S. Integer, fractional and fractal Talbot effects. *J. Modern Opt.* 43 (1996), no. 10, 2139–2164.
- Born, M.; Wolf, E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Third revised edition Pergamon Press, Oxford-New York-Paris 1965.
- Chamizo, F.; Santillán, O. P. About the quantum Talbot effect on the sphere. *J. of Phys. A.* [DOI 10.1088/1751-8121/acd489](https://doi.org/10.1088/1751-8121/acd489).
- Olver, P. J. Dispersive quantization. *Amer. Math. Monthly* 117 (2010), no. 7, 599–610.

#### 4.- TEMA: **Sumas de cuadrados y formas modulares**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: El propósito del trabajo es utilizar el problema de la representación de enteros como suma de cuadrados para adentrarse en algunos aspectos de la teoría de formas modulares. Se verán pruebas completas de las fórmulas para dos y cuatro cuadrados.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Variable Compleja II y Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Chamizo, F. Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas. [https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/files/ell\\_th.pdf](https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/files/ell_th.pdf).
- Grosswald, E. Representations of integers as sums of squares. Springer-Verlag, New York, 1985.
- Iwaniec, H. Topics in classical automorphic forms. Graduate Studies in Mathematics, 17. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- Rankin, R. A. Modular forms and functions. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977.

#### 5.- TEMA: **Computación cuántica básica con álgebra lineal**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: Este es un acercamiento a la computación cuántica poniendo el énfasis en temas de álgebra lineal, en especial en matrices unitarias y productos tensoriales. Habrá también alguna incursión en la teoría cuántica básica que justifica el modelo.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ninguna.

Bibliografía/referencias:

- Gudder, S. Quantum computation. *Amer. Math. Monthly* 110 (2003), no. 3, 181–201.
- Nakahara, M.; Ohmi, T. Quantum computing. From linear algebra to physical realizations. CRC Press, Boca Raton, FL, 2008.
- Nielsen, M. A.; Chuang, I. L. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- Rué, J.; Xambó, S. Mathematical essentials of quantum computing. *Butl. Soc. Catalana Mat.* 28 (2013), no. 2, 183–231, 234.  
<https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/QC/qc.pdf>.

#### 6.- TEMA: **El momento angular en física cuántica**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: Tras una introducción a la mecánica cuántica básica, se estudiarán las propiedades del operador momento angular orbital y su relación con los armónicos esféricos. Se complementará también con el espín, como momento angular intrínseco. Si sobra tiempo, se puede entrar en la relación con la teoría de representaciones.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Análisis Funcional y Variable Real.

Bibliografía/referencias:

- Chamizo, F. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas). <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/qf.pdf>.
- Konishi, K. and Paffuti, G. Quantum mechanics. A new introduction. Oxford University Press, Oxford, 2009.
- Ynduráin, F. J. Mecánica cuántica: teoría general. Ariel, Barcelona 2003.
- Zwiebach, B. *8.06 Quantum Physics II*. Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>. License: Creative Commons BY-NC-SA.

#### 7.- TEMA: **Sumas e integrales oscilatorias**

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: El tema principal es un estudio de sumas e integrales trigonométricas basado sobre todo en el principio de fase estacionaria. También se entrará en algunas consideraciones más algebraicas y aritméticas con especial referencia a las sumas de Gauss.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Variable Real y Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Duke, W.; Garcia, S. R.; Lutz, B. The graphic nature of Gaussian periods. *Proc. Amer. Math. Soc.* 143 (2015), no. 5, 1849–1863.
- Graham, S. W.; Kolesnik, G. van der Corput's method of exponential sums. London Mathematical Society Lecture Note Series, 126. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- Huxley, M. N. On stationary phase integrals. *Glasgow Math. J.* 36 (1994), no. 3, 355–362.
- Montgomery, H. L. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.