Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2023-24

PROFESOR: Pablo Candela

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 2

1.- TEMA: Cotas en el Teorema de Roth: un gran avance reciente

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido: El análisis de Fourier discreto es una herramienta fundamental con numerosas aplicaciones en varias áreas matemáticas y tecnológicas. En este trabajo se estudia la teoría básica del análisis de Fourier discreto, así como algunas de las principales herramientas relacionadas que se usan en el área de teoría de números conocida como la combinatoria aritmética. Uno de los principales objetivos sería explicar la prueba de un importante resultado reciente de Kelley y Meka, que proporciona las mejores cotas conocidas para el *Teorema de Roth* en combinatoria aritmética. Este teorema nos dice que para cualquier $d>0$, si N es suficientemente grande entonces cualquier subconjunto A del intervalo de enteros $[1, N]$ con cardinalidad $|A| > dN$ debe contener progresiones aritméticas de longitud 3. La pregunta de cuán grande debe ser N como función de d es uno de los problemas más importantes en combinatoria aritmética desde al menos los años 1950. En 2023, Kelley y Meka consiguieron un impresionante avance en esta dirección. La demostración de este resultado sería uno de los temas centrales a estudiar en este TFG.

Requisitos: conocimiento básico de análisis y de teoría de números elemental.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: partes básicas de Teoría de la Integral y de la Medida y de Análisis Funcional pueden ser útiles, pero no necesarias.

Bibliografía/referencias:

- Z. Kelley, R. Meka, *Strong Bounds for 3-Progressions*, prepublicación disponible en https://arxiv.org/abs/2302.05537

- T. F. Bloom, O. Sisask, *The Kelley--Meka bounds for sets free of three-term arithmetic progressions*, prepublicación disponible en https://arxiv.org/abs/2302.07211

- T. Tao, V. Vu, *Additive combinatorics*, especialmente el capítulo 4, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

- A. Terras, *Fourier analysis on finite groups and applications*, London Mathematical Society Student Texts, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

2.- TEMA: : El método polinomial en combinatoria (Genérico)

Válido para 1 alumno

Resumen/contenido: El método polinomial en combinatoria consiste en enfocar problemas combinatorios algebraicamente, de un modo que implica expresar una estructura combinatoria de interés usando polinomios, y analizar las propiedades de la estructura mediante el estudio de propiedades de estos polinomios. Recientemente, el método polinomial ha producido soluciones notablemente simples y elegantes de varios problemas centrales en combinatoria que llevaban abiertos muchos años. Un ejemplo famoso fue la obtención de nuevas cotas espectaculares para el Teorema de Roth sobre cuerpos finitos, obtenidas por Ellenberg y Gijswijt basándose en progreso crucial de Croot, Lev y Pach, en 2017. Otro ejemplo es la elegante solución de la Conjetura de Kakeya sobre cuerpos finitos por Dvir en 2008. Este trabajo estudia algunos ejemplos principales de la amplia gama de resultados y técnicas que ofrece el método polinomial, y trata también algunos de los resultados recientes mencionados anteriormente.

Requisitos: conocimiento básico de álgebra y de teoría de números elemental.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: partes básicas de Álgebra Conmutativa pueden ser útiles, pero no necesarias.

Bibliografía/referencias:

- T. Tao, *Algebraic combinatorial geometry: the polynomial method in arithmetic combinatorics, incidence combinatorics, and number theory*, disponible en https://arxiv.org/abs/1310.6482

- L. Guth, *Unexpected applications of polynomials in combinatorics*, disponible en http://math.mit.edu/~lguth/Exposition/erdossurvey.pdf

- Z. Dvir, *On the size of Kakeya sets in finite fields*, J. Amer. Math Soc. (2009) 22, 1093-1097.

- J. S. Ellenberg, D. Gijswijt, *On large subsets of F_q^n with no three-term arithmetic progression*, Annals of Math. 185 (2017), 339-343.

- T. Tao, V. Vu, *Additive combinatorics*, especialmente el capítulo 9, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.