Curso Avanzado de Análisis: Espacios clásicos de funciones analíticas

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2016-17

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Espacios de Bergman

1. Usando el razonamiento habitual con familias normales y cualquiera de las estimaciones puntuales vistas en clase, compruebe que el espacio de Bergman A^p es un espacio de Banach para $1 \le p < \infty$. Asimismo, compruebe que $A^\infty = H^\infty$ (es decir, las funciones analíticas esencialmente acotadas en $\mathbb{D}$ respecto a la medida del área coinciden con las acotadas en $\mathbb{D}$).

2. Compruebe que la función
$$f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha}$$
pertenece al espacio de Bergman A^p si y sólo si $\alpha < 2/p$.

   (*Sugerencia.* Integre en coordenadas polares centradas en $z = 1$ en lugar de en $z = 0$.)

3. Hemos visto en clase (ejemplo con una serie lagunar) que existen funciones en A^p que no tienen límites radiales en casi ningún punto de la circunferencia unidad y, por tanto, no pertenecen a la clase de Nevanlinna, N. Decida razonadamente, para un valor de p dado, si se cumple o no la inclusión $N \subset A^p$.

4. Hemos visto en clase que, para $1 < t < s$ se tiene la acotación
$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^s}\, dA(\zeta) \le \frac{C}{(1-|z|^2)^{s-t}}$$
para alguna constante $C > 0$. Demuestre la siguiente versión limite cuando $s \to t$: para $t > 1$ se cumple la estimación
$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^t}\, dA(\zeta) \le C \log \frac{2}{1-|z|^2}$$
para alguna constante $C > 0$.

5. Calcule la proyección de Bergman de las siguientes funciones:

   (a) $u(z) = \operatorname{Re} z$;

   (b) $F(z) = |z|^2$.

Operador de desplazamiento (multiplicación por z). Teorema de Beurling

Recordemos: en un espacio X de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ que contiene a los polinomios, el operador de desplazamiento, $S = M_z$, se define como

$$Sf(z) = (M_z f)(z) = zf(z).$$

El espacio generado por $f \in X$ es el espacio cerrado

$$[f] = \overline{\{pf : p \text{ polinomio}\}}.$$

El teorema de Beurling afirma que todo subespacio invariante, $M \neq \{0\}$, por el operador $S = M_z$ en H^2 es de la forma $M = uH^2 = [u]$, para cierta u interna, que es única salvo un múltiplo de módulo uno.

6. Deduzca de la la demostración del teorema de Beurling dada por Helson-Lowdenslager (vista en clase) -o de otra manera- que el espacio

$$M \ominus zM = \{f \in M : f \perp zM\}$$

tiene dimensión uno.

7. Demuestre el siguiente enunciado alternativo del teorema de Beurling: factorizando una función $f \in H^2$ como $f = uF$, con u interna y F factor externo en H^2, entonces

$$[f] = uH^2.$$

8. Sea $1 \le p < \infty$. Ya sabemos (y es obvio) que el operador M_z es acotado en A^p y, de hecho, es contractivo:

$$\|M_z f\|_p \le \|f\|_p.$$

Demuestre que también está acotado inferiormente, es decir, que existe $C_p > 0$ tal que

$$\|f\|_p \le C_p \|M_z f\|_p.$$