Curso Avanzado de Análisis: Espacios clásicos de funciones analíticas

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2016-17

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Clase de Nevanlinna

1. Usando el teorema de F. y R. Nevanlinna sobre la estructura de las funciones en la clase N, compruebe que N es un espacio vectorial.

2. Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y supongamos que $f(0) \neq 0$. Demuestre que $f \in N$ si y sólo si

$$\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} \Big|\log|f(re^{it})|\Big|\, dt < \infty.$$

Productos finitos de Blaschke

3. Sabemos de clase que si B es un producto de Blaschke finito de grado n, entonces

   (i) $B \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}(\overline{\mathbb{D}})$, (ii) $|B(z)| = 1$ para todo z tal que $|z| = 1$, (iii) B tiene exactamente n ceros en $\mathbb{D}$, contando multiplicidades.

   Demuestre que toda función que tiene las propiedades (i)–(iii) es un producto de Blaschke finito de grado n.

4. Supongamos que $r_k > 0$ y $|\alpha_k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Utilizando el ejercicio anterior, demuestre que toda función racional de la forma $g(z) = \sum_{k=1}^{n} r_k \frac{1+\alpha_k z}{1-\alpha_k z}$ puede escribirse como $\frac{1+B}{1-B}$, siendo B un producto de Blaschke de grado n.

Productos infinitos

5. Demuestre que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ converge absoluta y uniformemente en cada conjunto compacto del plano.

   (*Una posible sugerencia:* Demuestre primero que, en cada conjunto compacto $K \Subset \mathbb{C}$ se cumple

$$e^{-\frac{z}{n}} = 1 - \frac{z}{n} + \frac{A(z)}{n^2},$$

   donde $A(z)$ es cierta función que está uniformemente acotada en K.)

6. Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Demuestre que f es un producto de Blaschke (salvo un múltiplo constante de módulo 1) si y solo si

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \Big|\log|f(re^{i\theta})|\Big|\, d\theta = 0.$$

Factorización en espacios de Hardy

7. Sea $a \in \mathbb{D}$. En clase ya vimos que si $f \in H^2$, entonces

$$|f(a)| \leq \frac{\|f\|_2}{(1-|a|^2)^{1/2}}.$$

Usando la técnica de factorización de Riesz, demuestre que si $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, entonces

$$|f(a)| \leq \frac{\|f\|_p}{(1-|a|^2)^{1/p}}.$$

8. Compruebe que $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z^2-1}}$ es una función singular interna y determine la función singular μ en su representación

$$f(z) = e^{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(z)}.$$

9. Sea f una función interna y φ un automorfismo del disco unidad. Demuestre que ambas $f \circ \varphi$ y $\varphi \circ f$ son internas.

10. Sea f una función interna (no constante) tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuestre que

$$\frac{1}{f} \in N \setminus \bigcup_{0<p<\infty} H^p.$$

11. (a) Si tanto f como $\frac{1}{f} \in H^1$, demuestre que f es una función externa.

    (b) Si $f \in H^1$ y $\mathrm{Re}\, f > 0$ en $\mathbb{D}$, demuestre que f es externa.

12. Compruebe que la función $f(z) = \dfrac{(z^3+z^5)(1-2z)}{2-z}$ está en H^∞ y determine cada uno de los factores B, S y F en su factorización canónica.