Curso Avanzado de Análisis: Espacios clásicos de funciones analíticas
Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2016-17

HOJA 1 DE PROBLEMAS

Funciones de variación acotada. Integral de Riemann-Stieltjes

1. Sea $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, para $-2 \le x \le 2$.
   (a) Calcule la variación $V_{-2}^{x}(f)$ para cualquier $x \in [-2, 2]$.
   (b) Represente f como diferencia de dos funciones crecientes en $[-2, 2]$.

2. Demuestre que
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
no es una función de variación acotada en el intervalo $[0, \frac{2}{\pi}]$, a pesar de ser continua en $[0, \frac{2}{\pi}]$ y derivable en $(0, \frac{2}{\pi}]$.

3. Sea $E \subset [a, b]$. Demuestre que la función característica $\chi_E \in BV[a, b]$ si y sólo si el borde ∂E es un conjunto finito.

4. Compruebe rigurosamente los siguientes hechos mencionados en clase:
   (a) $\|f\| = V_a^b(f)$ define una semi-norma en el espacio vectorial $BV[a, b]$ y una norma en su subespacio $BV_0[a, b] = \{f \in BV[a, b] : f(a) = 0\}$, mientras que $\|f\| = |f(a)| + V_a^b(f)$ define una norma en $BV[a, b]$.
   (b) el espacio $BV_0[a, b]$, normado como arriba, es completo.

5. Sea $f \in C[a, b]$. Demuestre que, cuando g tiene derivada continua y positiva en $[a, b]$, se cumple la igualdad
$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

6. Sea, como siempre, $[x] = n$ si y sólo si $n \le x < n + 1$ $(n \in \mathbb{Z})$.
   (a) Si $f \in C[0, a]$, $0 < a < +\infty$, demuestre que $\displaystyle\int_0^a f(x)\, d[x] = \sum_{k=1}^{[a]} f(k)$, directamente o usando una fórmula vista en clase.
   (b) Compruebe que $\displaystyle\int_0^3 x\, d([x] - x) = \frac{3}{2}$.

7. Compruebe que (a diferencia de la integral de Riemann) la existencia de las integrales de Riemann-Stieltjes $\displaystyle\int_{-1}^0 f\, dg$ y $\displaystyle\int_0^1 f\, dg$ no implica la existencia de $\displaystyle\int_{-1}^1 f\, dg$.

Los espacios de Hardy, H^p y h^p: primeras propiedades

8. La siguiente desigualdad elemental es muy útil en la teoría de espacios de Hardy:

$$\max\{a^p, b^p\} \le (a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p), \qquad a, b \ge 0, \quad 0 < p < \infty.$$

La primera desigualdad es fácil. En cuanto a la segunda, en clase demostramos el caso $p \ge 1$. Demuestre rigurosamente la segunda desigualdad en el caso restante $0 < p < 1$.

9. En clase estudiamos el núcleo reproductor (de Riesz) para el espacio H^2, que es la función

$$k_a(z) = \frac{1}{1-\overline{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}.$$

Compruebe que si una función $f \in H^2$ es ortogonal a todas las funciones $k_{i/(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces es idénticamente nula.

10. Hemos visto en clase que, para todo $s > 0$, tomando la rama principal del logaritmo (en el plano menos la parte negativa del eje real y con $\log 1 = 0$) se puede definir f_s como función analítica en el disco mediante la fórmula

$$f_s(z) = \frac{1}{(1-z)^s} = e^{-s\log(1-z)}$$

y que $f_s \in H^2$ si $s < 1/2$.

(a) Compruebe que $f_1 \in H^p$ si y sólo si $0 < p < 1$; equivalentemente, $f_s \in H^p$ si y sólo si $0 < p < 1/s$.

(b) Demuestre que H^q es un subconjunto propio de H^p si $0 < p < q \le \infty$.

11. Sea $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. Compruebe que $f \in H^\infty$ y que tiene límite radial finito en todo punto de $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. ¿Qué módulo tienen esos límites radiales? Analice la existencia del límite global cuando $z \to 1$ (estando dentro de $\mathbb{D}$).

12. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y supongamos que el conjunto $f(\mathbb{D})$ no es denso en $\mathbb{C}$. Demuestre que f tiene límite radial en casi todo punto de $\mathbb{T}$.

13. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, demuestre que $\log(1+|f|)$ es subarmónica en $\mathbb{D}$.

14. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (analítica en $\mathbb{D}$) tal que $f(\mathbb{D})$ está contenido en un sector angular de apertura α, $0 < \alpha \le 2\pi$. Demuestre que entonces $f \in H^p$ para todo $p < \pi/\alpha$.