Curso Avanzado de Análisis: Espacios clásicos de funciones analíticas

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2016-17

DIARIO DE CLASE

1. L, 30/01/2017: (*Introducción. Contenidos. Evaluación. Bibliografía.*) Repaso de las funciones holomorfas y de la convergencia uniforme local: funciones holomorfas, ecuaciones de Cauchy-Riemann, lema de Weyl, maneras de definir funciones holomorfas (fórmula explícita, series infinitas, productos infinitos, integrales con parámetro), convergencia uniforme sobre compactos de sucesiones y series, teorema de Weierstrass, criterio de Weierstrass, ejemplos, series de potencias, radio de convergencia y derivación término-por-termino, equivalencia entre holomorfía y analiticidad.

2. X, 01/02: Comentarios sobre el comportamiento en la frontera de funciones analíticas en el disco. ¿Por qué estudiar diversos espacios de funciones? El espacio de Hardy H^2 (coeficientes de cuadrado sumable), ejemplos de funciones con distintos comportamientos, acotación de funcionales de evaluación, convergencia en H^2 implica la convergencia uniforme sobre compactos.

3. L, 06/02: Convergencia uniforme sobre compactos no implica la convergencia en H^2. El espacio de las funciones analíticas acotadas, H^∞, y su completitud. Otra manera equivalente de entender el espacio H^2: acotación de medias integrales cuadráticas. Aplicaciones: (1) $H^\infty \subset H^2$; (2) una familia de funciones no acotadas: $(1-z)^s$ y su pertenencia a H^2. Un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$ que se puede identificar con H^2; desarrollo en series de Fourier de sus funciones.

4. X, 08/02: Repaso breve de las funciones armónicas. Conjugada armónica; cómo calcularla en un dominio simplemente conexo. ¿Por qué normalmente trabajamos en el disco? Núcleo de Poisson. Propiedades: completación analítica, aproximación de la identidad. Teorema de Schwarz y más allá: mención del teorema de Fatou de 1906. Convergencia de las series de Fourier en casi todo punto: mención del teorema de Carleson (y Hunt). De vuelta al subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$. (*Sobre la evaluación final: desarrollo del trabajo a presentar y su defensa.*)

5. L, 13/02: Las medias integrales de orden p, $0 < p \le \infty$ y los espacios de Hardy H^p y h^p: propiedades elementales. Breve repaso: funciones de variación acotada: ejemplos, propiedades. La integral de Riemann-Stieltjes: definición y propiedades básicas.

6. X, 15/02: Integral de Riemann-Stieltjes: teoremas de existencia. Desigualdades y estimaciones para la integral de Riemann-Stieltjes. Norma en $BV_0[a,b]$; normalización. Teorema de representación de Riesz para $C[a,b]$. Convergencia débil-$*$. Teorema de Banach-Alaoglu. Caso especial: teorema de selección de Helly (o Helly-Bray).

7. L, 20/02: Caracterización de las funciones en h^1: diferencias de dos funciones armónicas positivas, integrales de Poisson-Stieltjes. Sobre la unicidad de la función de variación acotada (o medida con signo) en la representación. Teorema de representación de Herglotz. Comportamiento frontera: motivación (convoluciones del núcleo de Poisson con una función de clase L^1 en la circunferencia: comportamiento en los puntos de continuidad).

8. X, 22/02: La derivada simétrica. Teorema de Fatou acerca de los valores frontera. Breve repaso: funciones absolutamente continuas. Propiedades. Corolario de Fatou: existencia de límites radiales para las integrales de Poisson de una función de clase L^1 en la circunferencia.

9. L, 27/02: Repaso: funciones subarmónicas, definición, desigualdad del valor medio, tres ejemplos típicos de funciones subarmónicas (a partir de funciones armónicas y analíticas). Aplicaciones de la subarmonicidad a los espacios de Hardy. Teorema de convexidad de Hardy. Repaso: funciones univalentes y sus propiedades básicas. Motivación de la subordinación: caso de las funciones subordinadas a una función univalente.

10. X, 01/03: Subordinación en general. Otra aplicación de la subarmonicidad: el principio de subordinación de Littlewood. Breve repaso: automorfismos de un dominio plano, rotaciones e involuciones del disco, caracterización de los automorfismos del disco, lema de Schwarz-Pick, significado geométrico. Comentarios sobre operadores de composición en H^p. Preguntas sobre la existencia de límites radiales en H^p y h^p cuando $0 < p < 1$. Funciones de característica acotada: la clase de Nevanlinna - una ampliación de los espacios de Hardy.

11. L, 06/03: Las derivadas de Wirtinger: motivación, definiciones y propiedades. Ejemplos. Aplicaciones a las funciones analíticas, armónicas y subarmónicas. Estructura de las funciones en espacios de Hardy. Fórmula de Jensen: prueba del lema clave y enunciado.

12. X, 08/03: Comentarios adicionales sobre el lema del otro día. Demostración de la fórmula de Jensen. Repaso: agotamiento de un dominio por compactos, el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ es metrizable, familias normales, sobre la equivalencia de las dos posibles interpretaciones de la definición (proceso diagonal), teorema de Montel, compacidad de la bola unidad de H^2 en las distintas topologías. Teorema de R. y F. Nevanlinna: enunciado y comienzo de la demostración.

13. L, 13/03: Fórmula de Poisson-Jensen. Teorema de R. y F. Nevanlinna: fin de la demostración. Breve repaso de productos infinitos: definición, primeras propiedades, un ejemplo.

14. M, 14/03 (recuperación del festivo de 20/03): Más sobre productos infinitos, motivación de algunas definiciones y resultados básicos. Teorema de F. Riesz sobre los límites radiales de las funciones en H^p, la integrabilidad del logaritmo de los valores frontera y su pertenencia a $L^p(\mathbb{T})$. Teorema sobre los ceros de las funciones con las integrales del logaritmo acotadas; condición de Blaschke. Aplicación a los ceros de la clase de Nevanlinna. Productos de Blaschke finitos: propiedades.

15. X, 15/03: Productos de Blaschke infinitos: definición y propiedades (teorema de Blaschke). Teorema de factorización de Riesz; descripción de la técnica de factorización de Riesz. Convergencia en media a los límites radiales: enunciado del teorema de Riesz.

16. X, 22/03: Lema de Riesz: otro teorema sobre el intercambio del límite y la integral; prueba de Novinger. Convergencia en media a los límites radiales: demostración del teorema de Riesz como ilustración de la técnica de factorización. Consecuencia: otra forma de definir la norma en H^p, $p \geq 1$ y la métrica, $0 < p < 1$. Comentarios adicionales sobre la factorización de Riesz: igualdad de normas. Corolario del teorema de Riesz: convergencia en media de orden uno de $\log^+$. Un típico contraejemplo en la clase de Nevanlinna. Una desigualdad integral para el logaritmo.

17. L, 27/03: Breve repaso de la descomposición de Lebesgue de una medida. Funciones internas y externas. Teorema de factorización canónica de Smirnov. Deducción de la factorización y la unicidad. Repaso: desigualdades para las medias integrales de orden p, $p \in \mathbb{R}$.

18. X, 29/03: Deducción de la fórmula para la media geométrica y de la desigualdad aritmético-geométrica. Aplicación de la desigualdad aritmético-geométrica: fin de la demostración del teorema de factorización canónica. La clase N^+ de Smirnov, caracterización y ejemplos. Mayorantes armónicas: una definición alternativa de los espacios de Hardy. Aplicación: una generalización del principio de subordinación de Littlewood (acotación de operadores de composición con símbolos arbitrarios).

19. L, 03/04: H^1 y la integral de Poisson. Corolarios relacionados con la conjugada armónica y factorización canónica. Las funciones con parte real positiva están en H^p, para todo $p < 1$. Contraejemplo para H^1: núcleo de Poisson. Los límites radiales de las funciones en H^p y su relación con el cierre de los polinomios.

20. X, 05/04: Corolarios de la densidad de los polinomios: completitud de los espacios de Hardy. Descripción de las funciones en L^p de la circunferencia unidad que son límites radiales de funciones en H^p a través de sus coeficientes de Fourier. Breve repaso de las diversas formas de ver los espacios de Hardy. Representación de una función armónica en el disco como suma de una analítica y otra analítica conjugada. Caso especial de las funciones en h^2 y conexión con el núcleo reproductor para h^2; proyección de Riesz.

21. X, 19/04: Equivalencia entre la acotación de la conjugada armónica y la acotación de la proyección de Riesz para $1 < p < \infty$. Fórmula de Green en coordenadas polares. Fórmula para la conjugada armónica en forma de serie. Polinomios armónicos y sus conjugadas armónicas. Teorema de M. Riesz: acotación de la conjugada armónica, $1 < p < \infty$: enunciado, demostración en el caso $1 < p \leq 2$. Repaso: dualidad de los espacios L^p y normas de los funcionales lineales.

22. L, 24/04: Teorema de M. Riesz sobre la conjugada armónica: demostración en el caso $2 < p < \infty$ por dualidad. Enunciado del teorema de Kolmogórov. Norma de la proyección de Riesz/Szegö, $1 < p < \infty$: enunciados de los resultados de Gohberg-Krupnik y de Hollenbeck-Verbitsky. Desigualdad de Hilbert; demostración. Aplicación: desigualdad de Hardy, estimaciones para los coeficientes de Taylor de una función en H^1. Matrices de Hankel. Relación de la desigualdad de Hilbert con las formas sesquilineales y con el operador matriz de Hilbert en ℓ^2.

23. X, 26/04: Teoría básica de los espacios de Bergman. Definición, monotonía de inclusiones entre espacios de Bergman, ejemplos de funciones en A^p. Relación entre H^p y A^p. Fórmulas para el producto escalar y la norma en A^2. Ejemplo: serie lagunar en A^2 sin límites radiales en casi todo punto. Teorema del valor medio y desigualdad del valor medio para las integrales de área. Estimaciones puntuales en A^p y consecuencias: normalidad de la bola unidad, completitud de los espacios de Bergman. Un problema extremal: estimación precisa para la evaluación puntual en A^p: demostración a través de isometrías biyectivas y la desigualdad aritmético-geométrica. Núcleo reproductor de Bergman: deducción de la fórmula. Proyección de Bergman.

24. X, 03/05: Demostración de un lema importante (estimación para integrales con dos parámetros). Aplicación: demostración de la acotación de la proyección de Bergman, $1 < p < \infty$, e identificación del espacio dual de A^p (teoremas de Zaharjuta-Yudovich y Forelli-Rudin). Comentarios sobre la dualidad y A^1.

25. V, 05/05: Subespacios invariantes y el retículo que forman. Un poco de historia del problema del subespacio invariante. El operador de desplazamiento en espacios de Hardy y Bergman. Teorema de Beurling: enunciado y demostración.

26. L, 08/05: Espacios funcionales de Banach (definidos por axiomas básicos). Acotación uniforme de los funcionales de evaluación en compactos y consecuencias: la convergencia en norma implica la convergencia uniforme en compactos. Multiplicadores puntuales: acotación, ejemplos. Acotación del operador de multiplicación por el teorema del grafo cerrado. Vectores cíclicos. Relación con el teorema de Beurling en H^p. Vectores cíclicos en espacios de Bergman: un problema abierto. Índice de un subespacio invariante; subespacio errante. Otro enunciado de Beurling. Enunciados de los teoremas de Apostol, Bercovici, Foias y Peacy y del teorema de Aleman, Richter y Sundberg. Comentarios sobre los conjuntos de ceros para los espacios de Bergman: dependencia del exponente p (resultados de Horowitz). Divisores contractivos (Hedenmalm; Duren, Khavinson, Shapiro, Sundberg). Unicidad de los divisores contractivos en espacios de Hardy y la no existencia en espacios de Bergman.

27. X, 10/05: Seminario del Prof. A. Aleman (U. de Lund, Suecia), 2 horas. Resumen: A classical result of Nevanlinna asserts that a power series with square summable coefficients can be written as a quotient of two bounded analytic functions in the disc. Similar results have been proved in the 90's for other classes of power series, and in 2002 an important result of this type has been proved for the Drury-Arveson space on the ball. I intend to describe a unified approach to this circle of problems based on the theory of reproducing kernels. The main result is a factorization theorem for reproducing kernel Hilbert spaces whose kernel has a normalized complete Nevanlinna-Pick factor. I will also present some applications of this general theorem which contains all previous results mentioned above.

28. L, 22/05: Fecha tope para el envío de los ficheros beamer en PDF. Presentaciones de trabajos (mañana y tarde).