Curso Avanzado de Análisis: Teoría de operadores y subespacios invariantes

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2013-14

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Espacios de Hardy

1. Sea B un producto de Blaschke finito de grado N (con N factores, posiblemente iguales). Demuestre que para cada punto $w \in \mathbb{D}$, el conjunto $\{z \in \mathbb{D} : B(z) = w\}$ tiene exactamente N elementos, contando las multiplicidades.

2. Sea $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ con N ceros en $\mathbb{D}$ (contando las multiplicidades) y tal que $|B(\zeta)| = 1$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Demuestre que B es un producto de Blaschke finito de grado N.

(*Sugerencia*. Conviene usar el Principio del módulo máximo.)

3. Construya un ejemplo de un producto de Blaschke cuyos ceros se acumulan en un subconjunto denso de la circunferencia unidad.

4. Sea $f \in H^2$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en el disco unidad $\mathbb{D}$. Denotando por $\tilde{f}(e^{it})$ los límites radiales de f: $\tilde{f}(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ que, como sabemos de clase, existen en casi todo $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Demuestre que para $0 < r < R < 1$ se tiene la igualdad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(Re^{it})|^2 \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (R^n - r^n)^2 .$$

(b) Pruebe que

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - \tilde{f}(e^{it})|^2 \, d\theta = 0 ,$$

justificando la respuesta.

5. (a) Demuestre que para toda $f \in H^2$ y todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple la estimación puntual

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{H^2}}{(1 - |z|^2)^{1/2}} .$$

(b) Utilice el teorema de factorización de Riesz para generalizar esta estimación como sigue: para toda $f \in H^p$, $1 \le p < \infty$, y para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{H^p}}{(1 - |z|^2)^{1/p}} .$$

Para un $z = w$ fijo, encuentre todas las funciones f_w para las que se tiene la igualdad.

Espacios de Bergman

6. Compruebe que la función

$$f_\alpha(z) = (1 - z)^{-\alpha}$$

pertenece al espacio de Bergman A^p si y sólo si $\alpha < 2/p$.

(*Sugerencia*. Integre en coordenadas polares centradas en $z = 1$ en lugar de en $z = 0$.)