Curso Avanzado de Análisis: Teoría de operadores y subespacios invariantes

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2013-14

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Operadores positivos. Representación polar

1. Demuestre la siguiente afirmación sin usar ningún teorema espectral. Si A es un operador autoadjunto, entonces $0 \le A \le I$ si y sólo si $A^2 \le A$. (*Sugerencia*: conviene usar el hecho, probado en clase, de que todo operador positivo tiene raíz cuadrada positiva.)

2. Demuéstrese que S, el operador de desplazamiento en l^2, no admite una representación polar (es decir, no se puede representar como producto de un operador unitario y otro positivo).

Invertibilidad de operadores. Espectro y sus propiedades

De aquí en adelante, supondremos que todos los espacios son de Banach. En virtud del teorema de la aplicación abierta, esto significará que si un operador tiene operador inverso (en el sentido algebraico), éste automáticamente será acotado. Expresaremos este hecho diciendo simplemente que el operador es *invertible*.

3. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Demuestre que T es invertible si y sólo si está acotado inferiormente y su rango es denso en Y.

4. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y consideremos el operador T definido en $\mathbb{C}^2$ (provisto del producto escalar habitual) mediante la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $\sigma(T)$, el espectro de T.

(b) Calcule $\|T^n\|$ para $n \in \mathbb{N}$.

(c) Calcule $r(T)$, el radio espectral de T.

Razone las respuestas.

5. (a) Si X es un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, compruebe que $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

(b) Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$ y $\lambda \in \sigma_r(A)$, demuestre que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

6. Sea (E,μ) un espacio de medida positiva y σ-finita. Ya sabemos que M_ϕ, el operador de multiplicación por $\phi \in L^\infty(E,\mu)$, está acotado en $L^2(E,\mu)$ y que, de hecho, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Además, hemos visto en clase que $\sigma(M_\phi) = R_\phi$, el rango esencial de ϕ. Recordemos que R_ϕ es el conjunto de todos los valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\mu\left(\{x \in E : \, |\phi(x) - \lambda| < \varepsilon\}\right) > 0\,.$$

Calcule $r(M_\phi)$ y demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) $\lambda \in \sigma_p(M_\phi)$ si y sólo si $\mu\left(\{x \in E : \, \phi(x) = \lambda\}\right) > 0$.

(b) $\lambda \in \sigma_c(M_\phi)$ si y sólo si $\lambda \in R_\phi$ y $\mu\left(\{x \in E : \, \phi(x) = \lambda\}\right) = 0$.

(c) $\sigma_r(M_\phi) = \emptyset$.

Operadores normales, autoadjuntos y unitarios

7. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$ y $A = A^*$. Si M es un subespacio invariante del operador A, compruebe que entonces $M^\perp$ también lo es.

8. Sea P una proyección ortogonal en un espacio de Hilbert. Demuestre que el espectro de P es uno de los siguientes conjuntos:

- $\{0\}$, en cuyo caso $P = 0$,
- $\{1\}$, en cuyo caso $P = I$,
- $\{0, 1\}$.

9. Sea N un operador normal en un espacio de Hilbert y p un polinomio con coeficientes complejos. Demuestre que

$$\|p(N)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(N)\}.$$

10. Consideremos el espacio l^2 complejo de sucesiones bilaterales, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y el operador de desplazamiento bilateral, dado por $Ve_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ya hemos visto en clase que V es un operador unitario (isométrico y suprayectivo) y que, por tanto, su espectro está contenido en $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, la circunferencia unidad. Compruebe que $\sigma(V) = \sigma_c(V) = \mathbb{T}$.

Operadores compactos

11. (a) Es fácil ver que el *operador de Volterra*, definido en $C[-1, 1]$ mediante la fórmula

$$Vf(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt\,,$$

es un operador acotado en $C[-1, 1]$ provisto de la norma habitual del máximo. Demuestre que V es compacto; es decir, que si B es la bola unidad de $C[-1, 1]$, entonces $V(B)$ es un conjunto relativamente compacto en $C[-1, 1]$. (*Sugerencia*: utilice el teorema de Ascoli-Arzelà.)

(b) Demuestre que $V(B)$ no es un conjunto compacto. (*Sugerencia*: conviene considerar funciones lineales a trozos.)

12. Sea $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números complejos. Definamos formalmente el *operador diagonal*, T_λ, mediante la fórmula

$$T_\lambda(a) = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \ldots)\,, \quad a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2\,.$$

Compruebe que:

(a) $T_\lambda \in \mathcal{B}(\ell^2)$ si y sólo si $\lambda \in \ell^\infty$, es decir, si y sólo si $\|\lambda\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$.

(b) T_λ es normal y $\sigma(T_\lambda) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

(c) Deduzca del apartado anterior que cualquier unión finita de segmentos (intervalos cerrados y acotados), circunferencias y discos cerrados en el plano es el espectro de un operador normal.

(d) $T_\lambda \in \mathcal{K}(\ell^2)$ si y sólo si $\lambda \in c_0$, es decir, si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

13. Compruebe que el operador $W \in \mathcal{B}(\ell^2)$, definido por $We_n = \dfrac{1}{n+1} e_{n+1}$, es compacto y $\sigma(W) = \{0\}$.