Curso Avanzado de Análisis: Teoría de operadores y subespacios invariantes

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, 2013-14

HOJA 1 DE PROBLEMAS

Espacios de Hilbert y Banach

1. Sea H un espacio con producto escalar y x, $y \in H$. Demuestre que $x \perp y$ si y sólo si $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ para todo escalar λ.

2. En el espacio (real) de Hilbert $L^2([0,1], m)$ respecto a la medida de Lebesgue, m, para cada uno de los siguientes subespacios lineales denotados por M, compruebe si es cerrado o no y luego determine $M^{\perp}$.

(a) el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales;

(b) el conjunto de todos los polinomios pares con coeficientes reales (comprobando que es lo mismo que el conjunto que todos los polinomios de x^2);

(c) el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales y cuya suma de los coeficientes es cero.

3. (a) Si M_1 y M_2 son dos subespacios cerrados del espacio de Hilbert H tales que $M_1 \perp M_2$, demuéstrese que la suma ortogonal $M_1 \oplus M_2$ también es un subespacio cerrado de H.

(b) Muestre un ejemplo en ℓ^2 y otro en $L^2[0,1]$ de dos subespacios ortogonales, uno cerrado y el otro no, cuya suma ortogonal no es un subespacio cerrado.

4. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(H)$. Compruebe que para todo x, $y \in H$ se cumple la *Identidad Generalizada de Polarización* :

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle \,.$$

Operadores acotados en espacios de Hilbert. Propiedades básicas

5. Sea (X, μ) un espacio de medida positiva. Hemos visto en clase que M_ϕ, el operador de multiplicación por $\phi \in L^\infty(X, \mu)$, está acotado en $L^2(X, \mu)$ y que $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. Supongamos ahora ciertas propiedades de "regularidad" de μ; por ejemplo, que para todo conjunto medible, $E \subset X$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \subset E$, medible, con $0 < \mu(F) < \infty$. Demuestre que entonces $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

6. Determine el operador adjunto del operador de desplazamiento en el espacio l^2 complejo, dado por $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

7. Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ invertible. Compruebe que T^* también es invertible y encuentre su operador inverso.

8. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert. Demuestre que los subespacios propios determinados por dos autovalores distintos de T son mutuamente ortogonales.

9. Sea H un espacio de Hilbert, M_1 y M_2 dos subespacios cerrados de H y P_1 y P_2 las proyecciones ortogonales sobre M_1 y M_2, respectivamente. Demuéstrese que el operador $P = P_1P_2$ es una proyección ortogonal si y sólo si $P_1P_2 = P_2P_1$ y que entonces P es la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado $M_1 \cap M_2$.