UAM, 2020-21. Curso Avanzado de Análisis
Ceros e interpolación de funciones analíticas

Ejercicios: Hoja 3

Integral de Riemann-Stieltjes

34) Sea, como es habitual, $[x] = n$ si y sólo si $n \le x < n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$).
(a) Si $f \in C[0,a]$, $0 < a < +\infty$, demuéstrese que $\int_0^a f(x)\,d[x] = \sum_{k=1}^{[a]} f(k)$, directamente o usando una fórmula vista en clase.
(b) Compruébese que $\int_0^3 x\,d([x]-x) = \frac{3}{2}$.

$\boxed{\textbf{35)}}$ Sean $0 < r < R \le \infty$ y $f \in \mathcal{H}(D(0;R))$ tal que $f(0) \ne 0$. Sean a_k los ceros de f, ordenados de manera que $0 < |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \ldots < R$, repetidos según sus multiplicidades y

$$n(t) = |\{a_k : |a_k| \le t\}|, \qquad 0 < t < R,$$

la *función de contar* (los ceros) de Nevanlinna, teniendo en cuenta las multiplicidades. Ya sabemos que la fórmula de Jensen se puede reescribir como sigue (véase la hoja anterior):

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt.$$

Esta vez se pide demostrar la fórmula usando la propiedad de integración por partes para la integral de Riemann-Stieltjes (eligiendo el integrando y el integrador de manera apropiada).

Espacios de Hardy: factorización canónica, teorema de Beurling

$\boxed{\textbf{36)}}$ (a) Sea $f \in H^1$ con $f \not\equiv 0$ y f^* sus valores frontera (límites radiales) correspondientes en $\mathbb{T}$. Demostrar que f es una función externa si y sólo si

$$\log|f(0)| = \int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}.$$

(b) Si tanto f como $\dfrac{1}{f} \in H^1$, se pide demostrar que f es una función externa.

37) Comprobar que $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z^2-1}}$ es una función singular interna y determinar la función singular μ en su representación

$$f(z) = e^{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(z)}.$$

38) Sea f una función interna y φ un automorfismo del disco unidad. Demostrar que ambas funciones compuestas $f\circ\varphi$ y $\varphi\circ f$ son internas.

39) Se pide comprobar que la función $f(z) = \frac{(z^3+z^5)(1-2z)}{2-z}$ está en H^∞ y después determinar cada uno de los factores B, S y F en su factorización canónica.

$\boxed{\textbf{40)}}$ Sea M un subespacio $S-$ invariante de H^2 (es decir, $zM \subset M$, M cerrado y no trivial). Examinando la demostración del teorema de Beurling dada por Helson-Lowdenslager (vista en clase) o razonando de otra manera, demostrar que el complementario ortogonal

$$M \ominus zM = \{f \in M : \ f \perp zM\}$$

es un subespacio de M de dimensión uno.

Espacios de Bergman: propiedades básicas

41) Comprobar que la función

$$f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha}$$

pertenece al espacio de Bergman A^p si y sólo si $\alpha < 2/p$.
(*Sugerencia.* Integrar en coordenadas polares centradas en $z = 1$ en lugar de en $z = 0$.)

$\boxed{\textbf{42)}}$ Demostrar que cada función fija $f \in A^p$ también satisface la versión "o-pequeña" de la estimación puntual demostrada en clase:

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|)^{2/p} |f(z)| = 0\,.$$

43) Calcule la proyección de Bergman de las siguientes funciones:
(a) $u(z) = |z|^2$;
(b) $v(z) = \operatorname{Re} z$.