UAM, 2020-21. Curso Avanzado de Análisis
Ceros e interpolación de funciones analíticas

Ejercicios: Hoja 2

Fórmula de Jensen. Clase de Nevanlinna

23) Sean $0 < r < R \le \infty$ y $f \in \mathscr{H}(D(0;R))$ tal que $f(0) \ne 0$. Sean a_k los ceros de f, ordenados de manera que $0 < |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \ldots < R$, repetidos según sus multiplicidades. Se define la *función de contar* (los ceros) de Nevanlinna como

$$n(t) = |\{a_k : |a_k| \le t\}|, \qquad 0 < t < R,$$

teniendo en cuenta las multiplicidades. (Obsérvese que es una función creciente, escalonada, continua por la izquierda y con valores enteros.) Esto nos permite reescribir la fórmula de Jensen como sigue:

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Demostrar la fórmula usando los conocimientos básicos de la integral de Lebesgue.

$\boxed{\textbf{24)}}$ Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y supongamos que $f(0) \ne 0$. Demostrar que $f \in N$ si y sólo si

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \Big|\log|f(re^{it})|\Big| dt < \infty.$$

25) Usando el teorema de F. y R. Nevanlinna sobre la estructura de las funciones en la clase N, comprobar que N es un espacio vectorial.

26) Sea $f \in N$ con un cero de orden $m > 0$ en el origen y $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(z) = z^m g(z)$. Demostrar rigurosamente que $g \in N$.

Espacios de Hardy: productos de Blaschke, factorización de Riesz

$\boxed{\textbf{27)}}$ Se pide construir un producto de Blaschke tal que todo punto de la circunferencia unidad sea un punto de acumulación de sus ceros.

28) Sea $a \in \mathbb{D}$. En clase ya vimos que si $f \in H^2$, entonces

$$|f(a)| \le \frac{\|f\|_2}{(1 - |a|^2)^{1/2}}.$$

Usando la técnica de factorización de Riesz, demostrar que si $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, entonces

$$|f(a)| \le \frac{\|f\|_p}{(1 - |a|^2)^{1/p}}.$$

$\boxed{\textbf{29)}}$ Hemos visto en clase que si B es un producto de Blaschke (arbitrario), entonces

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|\log|B(re^{i\theta})|\right| d\theta = -\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \log|B(re^{i\theta})| d\theta = 0\,.$$

Supongamos ahora que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|\log|f(re^{i\theta})|\right| d\theta = 0\,.$$

Demostrar que f es un producto de Blaschke.

30) Comprobar detalladamente que la bola unidad es un conjunto cerrado (y, por tanto, compacto) en $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ provisto de la topología de convergencia uniforme sobre compactos. ¿Es compacto en la norma de H^2? ¿Por qué?

Funciones de variación acotada

31) Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

no es una función de variación acotada en el intervalo $[0, \frac{2}{\pi}]$, a pesar de ser continua en $[0, \frac{2}{\pi}]$ y derivable en $(0, \frac{2}{\pi}]$.

$\boxed{\textbf{32)}}$ Sea $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, para $-2 \le x \le 2$.
(a) Calcule la variación $V_{-2}^{x}(f)$ para cualquier $x \in [-2, 2]$.
(b) Represente f como diferencia de dos funciones crecientes en $[-2, 2]$.

33) Sea $E \subset [a, b]$. Demuestre que la función característica $\chi_E \in BV[a, b]$ si y sólo si el borde ∂E es un conjunto finito.