UAM, 2020-21. Curso Avanzado de Análisis
Ceros e interpolación de funciones analíticas

Ejercicios: Hoja 1, segunda parte

Temas de repaso

14) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, usando los resultados vistos en clase, comprobar que $\log(1+|f|)$ es subarmónica en $\mathbb{D}$.

$\boxed{\textbf{15)}}$ Discutir la convergencia de los productos infinitos

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

16) Demostrar que el producto $\prod_n(1+a_n)$ converge absolutamente si y sólo si converge el producto $\prod_n(1+|a_n|)$.

Espacios de funciones analíticas: propiedades básicas

17) Definamos la determinación principal de la raíz cuadrada en $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\le 0\}$ mediante la fórmula $\sqrt{re^{it}} = \sqrt{r}e^{it/2}$, de manera que $\sqrt{1}=1$. Completar la comprobación de que $f(z)=\sqrt{1-z}$ define una función en $\mathscr{A}$, el álgebra del disco, verificando su continuidad en $\overline{\mathbb{D}}$.

18) En clase ya hemos visto la función *singular interna atómica*:

$$S(z) = e^{(z+1)/(z-1)}, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Hemos observado que S es continua en cada punto de $\mathbb{T}\setminus\{1\}$ (de hecho, es analítica en un entorno de cada uno de esos puntos) y, además, tiene límite radial $\lim_{r\to 1^-} S(r) = 0$. Consideremos el horociclo

$$C = \left\{z : \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{it} : t\in[0,2\pi]\right\}.$$

Se pide describir el conjunto $S(C)$ y razonar la existencia o no del límite de $S(z)$ cuando $z\to 1$ a lo largo de C. (*Este ejemplo demuestra que la existencia del límite radial en un punto de la circunferencia no implica la existencia del límite sin restricciones.*)

19) En clase estudiamos el núcleo reproductor (de Riesz) para el espacio H^2, que es la función

$$k_a(z) = \frac{1}{1-\overline{a}z}, \quad a\in\mathbb{D}.$$

Compruebe que si una función $f\in H^2$ es ortogonal a todas las funciones $k_{i/(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$, entonces es idénticamente nula.

$\boxed{\textbf{20)}}$ Sea $0<p<1$. Considerando la expresión formal $\|f\|_p$, definida en clase para una función $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, se pide comprobar que $d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p$ define una métrica en H^p y demostrar que el espacio H^p, dotado de dicha métrica, es completo.

21) Dada una función $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, denotemos por P_n su polinomio de Taylor de orden n y por T_n el operador lineal definido por $T_n f = P_n$. Sea X un espacio de Banach de funciones analíticas en

$\mathbb{D}$ tal que los polinomios son densos en X. Demostrar que tiene la propiedad de que $f_n \to f$ (en la norma de X) para toda $f \in X$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que $\|T_n\| \le C$.
(Ya hemos visto en clase que el espacio H^2, entre otros, tiene esta propiedad y hemos comentado que, por ejemplo, H^1 no la tiene.)
Sugerencia: Una de las implicaciones requiere el uso de alguno de los resultados básicos del análisis funcional.

22) Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y supongamos que el conjunto $f(\mathbb{D})$ no es denso en $\mathbb{C}$. Usando el teorema de Fatou, demuestre que f tiene límite radial en casi todo punto de $\mathbb{T}$.