UAM, 2020-21. Curso Avanzado de Análisis
Ceros e interpolación de funciones analíticas

Ejercicios: Hoja 1, primera parte

SOLUCIONES DE PROBLEMAS SELECTOS Y COMENTARIOS SOBRE LA CORRECCIÓN

Puntuación total: 15 puntos.

Temas de repaso

15) [5 puntos] Discutir la convergencia de los productos infinitos

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

SOLUCIÓN. *Observación importante:* Al igual que con las series infinitas, la discusión de la convergencia de un producto infinito debe incluir también la discusión de la convergencia absoluta (sólo cuando la serie converge, pues en caso contrario no es necesario), tal y como hicimos en el repaso en clase. La omisión de dicho análisis conllevará una pequeña penalización.
Recordemos que la convergencia absoluta implica la convergencia (condicional). Por tanto, sería un error grave -como en Cálculo- afirmar que la serie diverge pero converge absolutamente.

En este ejercicio, es inmediato que ninguno de los productos dados converge absolutamente, ya que la convergencia absoluta de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es equivalente a la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y eso nos lleva (en ambos casos) a la misma serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

que es divergente.
Veamos la convergencia. En el primer producto, debemos descartar su único término nulo que se obtiene para $n=1$, considerando el producto restante

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}.$$

Los productos parciales correspondientes a los valores impares son

$$\prod_{n=2}^{2N+1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \prod_{n=2}^{2N+1}\frac{n+(-1)^n}{n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2N-1}{2N-2}\cdot\frac{2N-2}{2N-1}\cdot\frac{2N+1}{2N}\,\frac{2N}{2N+1} = 1,$$

mientras que los productos parciales correspondientes a los valores pares son

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \prod_{n=2}^{2N}\frac{n+(-1)^n}{n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2N-1}{2N-2}\cdot\frac{2N-2}{2N-1}\cdot\frac{2N+1}{2N} = \frac{2N+1}{2N}\to 1, \quad N\to\infty.$$

Por tanto, la serie converge (cualquier subsucesión de productos parciales obviamente tiende a 1), siendo el producto límite igual a uno.
Obviamente, otras soluciones son posibles (usando la comparación con la serie de logaritmos, por ejemplo).

Para decidir la convergencia de la segunda serie, usamos un criterio visto en clase que nos dice que el producto considerado (que no tiene términos nulos) es equiconvergente con la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{i}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left|1+\frac{i}{n}\right| + i\arg\left(1+\frac{i}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{n}\right)$$

(usando la determinación principal del logaritmo, con $\log 1 = 0$) y que se debe interpretar como

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + i\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{n}.$$

Puesto que $\log(1+x) \sim x$ cuando $x \to 0^+$, el Criterio de comparación nos dice que son equiconvergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y, por tanto, ambas son convergentes (la segunda es muy conocida, convergente por el criterio integral, por ejemplo). Por el mismo criterio, recordando que $\mathrm{arc\,tg}\,x \sim x$ cuando $x \to 0^+$, también son equiconvergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

así que ambas son divergentes (pues la serie armónica diverge). La conclusión final es que nuestra serie es divergente y, por consiguiente, también lo es el producto infinito considerado.

En resumen, de los dos productos infnitos considerados en este ejercicio:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{i}{n}\right),$$

el primero converge condicionalmente (es decir, converge pero no converge absolutamente) y el segundo diverge. ■

Espacios de funciones analíticas: propiedades básicas

20) [5 puntos] Sea $0 < p < 1$. Considerando la expresión formal $\|f\|_p$, definida en clase para una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, se pide comprobar que $d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p$ define una métrica en H^p y demostrar que el espacio H^p, dotado de dicha métrica, es completo.

SOLUCIÓN. *El espacio es métrico.* Recordemos que, por definición,

$$\|f-g\|_p^p = \sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - g(re^{it})|^p \, dm(t),$$

siendo $dm(t) = dt/(2\pi)$. Por tanto, la simetría: $\|f-g\|_p^p = \|f-g\|_p^p$ y la propiedad $d_p(f,g) \ge 0$ son obvias. Además, si $d_p(f,g) = 0$, entonces para cada $r \in (0,1)$ obtenemos

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - g(re^{it})|^p \, dm(t) = 0,$$

lo cual implica que la función no negativa $|f(re^{it})-g(re^{it})|^p$ es nula en casi todo punto de cada una de las circunferencias $C_r=\{z:|z|=r\}$, $0<r<1$. Es suficiente que eso suceda en tan sólo una circunferencia, para aplicar el Principio de unicidad y deducir que $f(z)=g(z)$ en todo $z\in\mathbb{D}$.

Sólo nos queda comprobar la desigualdad triangular. Primero demostramos una desigualdad elemental, que es conocida pero debemos probarla.

Lema. Si $a, b\ge 0$ y $0<p<1$, entonces $(a+b)^p\le a^p+b^p$.

DEMOSTRACIÓN. Si $a=0$, es trivial. Por tanto, supongamos que $a\ne 0$ y pongamos $x=b/a$. La desigualdad se reduce a:

$$(1+x)^p\le 1+x^p, \quad x\ge 0, \quad 0<p<1.$$

Es fácil ver que esto se cumple considerando la función

$$\phi(x)=(1+x)^p-x^p, \quad x\ge 0:$$

de $\phi(0)=1$ y

$$\phi'(x)=p[(1+x)^{p-1}-x^{p-1}]\le 0$$

se sigue que $\phi(x)\le 1$ para todo $x\ge 0$, lo cual demuestra la desigualdad que nos interesa. ■

Aplicando el lema a los valores $a=|f(z)-g(z)|$ y $b=|g(z)-h(z)|$ y después integrando a lo largo de la circunferencia $C_r=\{z:|z|=r\}$, $0<r<1$, obtenemos

$$M_p^p(r;f-h)\le M_p^p(r;f-g)+M_p^p(r;g-h).$$

Finalmente, recordando que las medias integrales $M_p(r;f)$ son funciones crecientes de r para toda función analítica f y todo p, tomando el límite cuando $r\to 1^-$, obtenemos

$$d_p(f,h)\le d_p(f,g)+d_p(g,h).$$

El espacio es completo. Conviene razonar de manera análoga a la empleada en el caso $p\ge 1$, con unas modificaciones apropiadas. Basta demostrar alguna estimación puntual como, por ejemplo, la que se mencionó en la clase 15 (página 2 de los apuntes de 6/4/2021):

$$|f(z)|\le \frac{\|f\|_{H^p}}{(1-|z|^2)^{1/p}}$$

y cuya prueba pospusimos hasta la Hoja 2 (Problema 28), válida para todo $p>0$. (Existen otras estimaciones similares y sirven varias de ellas, aunque no sean precisas. Se admitirán razonamientos alternativos encontrados en la literatura, siempre que sean correctos.)

Si tenemos un compacto $K\Subset\mathbb{D}$, contenido en el disco $\{z:|z|\le R\}$ con $0<R<1$, dicha estimación implica

$$|f_n(z)-f(z)|^p\le \frac{d_p(f_n,f)}{1-|z|^2}\le \frac{d_p(f_n,f)}{1-R^2}$$

de donde se deduce que la convergencia en la métrica d_p implica la convergencia uniforme en compactos. Ahora procedemos como en nuestros apuntes de la clase 10 (p. 2 del día 11/3/2021), cuidando las diferencias pues sólo tenemos una métrica y no una norma.

Sea $0<p<1$ y $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en H^p. Entonces, también por la estimación anterior, $(f_n)_n$ una sucesión uniforme de Cauchy en cada compacto $K\Subset\mathbb{D}$. Por el criterio uniforme de Cauchy, f_n converge uniformemente en cada compacto de $\mathbb{D}$ a una función f que, por el Teorema de Weierstrass, tiene que ser analítica en el disco unidad.

Sea $\varepsilon>0$. Puesto que $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en H^p, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $m>n\ge N$ se cumple $d_p(f_m,f_n)<\varepsilon$. Entonces, usando el hecho de que las medias integrales de orden

p son funciones crecientes de r para cada $p > 0$ y tienden a la expresión formal $\|f\|_p$, deducimos que

$$\limsup_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_m(re^{it}) - f_n(re^{it})|^p \, dm(t) \le \limsup_{m\to\infty} d_p^p(f_m, f_n) \le \varepsilon^p$$

Por otra parte, la circunferencia $\{z : |z| = r\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y, debido a la convergencia uniforme en ella de f_m a f cuando $m \to \infty$ (para $n > N$ fijos), podemos intercambiar el límite y la integral, obteniendo

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f_n(re^{it})|^p \, dm(t) = \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_m(re^{it}) - f_n(re^{it})|^p \, dm(t)$$

De las dos últimas fórmulas se sigue que $d_p(f_n, f) \le \varepsilon^p$, para todo $n \ge N$. Por tanto, $f_n \to f$ en la métrica d_p y concluimos que el espacio es completo. ■

$\boxed{\textbf{22)}}$ [5 puntos] Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y supongamos que el conjunto $f(\mathbb{D})$ no es denso en $\mathbb{C}$. Usando el teorema de Fatou, demuéstrese que f tiene límite radial en casi todo punto de $\mathbb{T}$.

SOLUCIÓN. *Observación importante:* Las hipótesis del problema NO implican que f esté acotada (un error que se ha visto en algunas soluciones). Por ejemplo, $f(z) = (1+z)/(1-z)$, una aplicación conforme del disco al semiplano derecho, satisface las hipótesis del problema y, sin embargo, no es una función acotada.
Por hipótesis, f omite todos los valores en cierto disco abierto $D(a; r)$ y, por tanto, $|f(z) - a| \ge r$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto significa que la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

es analítica y acotada en $\mathbb{D}$ (por $1/r$). Por el teorema de Fatou, g tiene límite radial finito en casi todo punto de $\mathbb{T}$, digamos en $\mathbb{T} \setminus E$, con $m(E) = 0$.
Observación importante: Esto todavía no implica la conclusión del problema. Aunque g no se anula en el disco, sus límites radiales podrían anularse en algunos puntos de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Sin ir más lejos, eso ocurre con la función singular interna atómica, S, vista en clase, en el punto 1. Por tanto, es necesario establecer que los límites radiales sólo pueden ser nulos en un conjunto muy pequeño.
El límite radial de g podría ser nulo (lo cual implicaría límite radial infinito de $f - a$ en los puntos en cuestión) pero eso también sólo puede ocurrir en otro conjunto de medida nula, digamos $F \subset \mathbb{T}$, por el teorema de unicidad visto en clase (el que nos dice que $\log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$).
Por tanto, $m(E \cup F) = 0$ y en $\mathbb{T} \setminus (E \cup F)$ (eso es, en casi todo punto de $\mathbb{T}$) la función $f - a$ y, por tanto, f tiene límites radiales finitos. ■
