UAM, 2020-21. Curso Avanzado de Análisis
Ceros e interpolación de funciones analíticas

Ejercicios: Hoja 1, primera parte

SOLUCIONES DE PROBLEMAS SELECTOS

Puntuación total: 25 puntos.

Auto-aplicaciones holomorfas del disco, automorfismos y el Lema de Schwarz-Pick

1) [7 puntos] Sea T una transformación lineal fraccionaria (o de Möbius) no constante:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc \neq 0,$$

Demostrar que $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si y sólo si

$$|b\overline{d} - a\overline{c}| + |ad-bc| \le |d|^2 - |c|^2. \tag{1}$$

SOLUCIÓN. La continuidad de una transformación lineal fraccionaria nos dice que $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si y sólo si $T(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Es obvio que eso ocurre si y sólo si $T(\overline{\mathbb{D}})$ es un disco euclídeo contenido en $\overline{\mathbb{D}}$, digamos de radio R y centro S:

$$T(\overline{\mathbb{D}}) = \{w : |w-S| \le R\}.$$

Es inmediato que

$$\max\{|w| : w \in T(\overline{\mathbb{D}})\} = |S| + R,$$

ya que, por un lado, $w \in T(\overline{\mathbb{D}})$ implica

$$|w| \le |w-S| + |S| \le |S| + R$$

por la desigualdad triangular y, por otro lado, la cota se alcanza cuando S y $w-S$ tienen el mismo argumento (esto es, cuando 0, S y $w-S$ son colineales) y $|w-S| = R$, lo cual ocurre cuando

$$w = \left(1 + \frac{R}{|S|}\right) S.$$

Conclusión: $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si y sólo si $T(\overline{\mathbb{D}}) = \{w : |w-S| \le R\}$ y $|S| + R \le 1$.
Nuestro objetivo es demostrar que la última condición es equivalente a (1).

Si definimos $\phi(z) = (T(z)-S)/R$, vemos que $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Siendo ϕ composición de dos aplicaciones lineales fraccionarias no constantes, ϕ es inyectiva y, por tanto, es un automorfismo del disco, así que $\phi(z) = \lambda\varphi_\alpha$ para cierto $\alpha \in \mathbb{D}$ y $|\lambda| = 1$, como ya sabemos. En otras palabras, $T(z) = \lambda R \varphi_\alpha(z) + S$, para todo $z \in \mathbb{D}$.
Antes de continuar, conviene hacer algunas observaciones preliminares. El caso $d = 0$ es más fácil porque T se reduce a una función afín (lineal). Trataremos sólo el caso $d \neq 0$; entonces

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}}{\frac{c}{d}z + 1} = \frac{Az+B}{Cz+1},$$

con lo cual podemos reducir el problema al caso $d = 1$. Sólo hace falta probar que $|S| + R \le 1$ es equivalente a (1).

Lema. Si dos transformaciones de Möbius, ambas con $d=1$, coinciden en el disco:

$$\frac{Az+B}{Cz+1}=\frac{A'z+B'}{C'z+1}\,, \qquad \forall z\in\mathbb{D}\,,$$

entonces sus coeficientes coinciden: $A=A'$, $B=B'$ y $C=C'$.

DEMOSTRACIÓN. Basta sustituir $z=0$ para ver que $B=B'$. Haciendo la multiplicación cruzada de ambos lados en la identidad planteada, obtentemos la igualdad de dos polinomios en $\mathbb{D}$. Igualando sus coeficientes, obtenemos un sistema 2×2 de ecuaciones lineales en A' y C' como incógnitas con determinante no nulo $A-BC$. Es fácil ver que (A,C) es una solución del sistema y, por tanto, es la única solución. El Lema queda demostrado.

Partiendo de la ecuación:

$$\frac{Az+B}{Cz+1}=\lambda R\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}+S\,,$$

calcularemos los valores de R y S. Primero obtenemos

$$\frac{Az+B}{Cz+1}=\frac{-(\lambda R+\overline{\alpha}S)z+\lambda\alpha R+S}{-\overline{\alpha}z+1}\,,$$

para todo $z\in\mathbb{D}$. Gracias al Lema demostrado anteriormente, esto es posible si y sólo si

$$A=-(\lambda R+\overline{\alpha}S)\,, \qquad B=\lambda\alpha R+S\,, \qquad C=-\overline{\alpha}\,.$$

Sustityendo el valor de $\overline{\alpha}=-C$ de la tercera condiciones en las dos primeras, obtenemos el sistema de dos ecuaciones lineales en R y S:

$$A=-\lambda R+CS\,, \qquad B=-\lambda\overline{C}R+S\,,$$

cuya solución es

$$R=\frac{BC-A}{\lambda(1-|C|^2)}\,, \qquad S=\frac{B-A\overline{C}}{1-|C|^2}\,.$$

Recordando que $R>0$ y $|\lambda|=1$, se sigue que

$$R=\frac{|BC-A|}{1-|C|^2}\,, \qquad S=\frac{B-A\overline{C}}{1-|C|^2}\,.$$

Con estos valores calculados, la condición $|S|+R\le 1$ se convierte en

$$\frac{|B-A\overline{C}|}{1-|C|^2}+\frac{|BC-A|}{1-|C|^2}\le 1\,,$$

lo cual significa

$$\left|\frac{b}{d}-\frac{a\overline{c}}{|d|^2}\right|+\left|\frac{bc}{d^2}-\frac{a}{d}\right|\le 1-\left|\frac{c}{d}\right|^2\,,$$

una condición obviamente equivalente a (1). ■

$\boxed{\textbf{3)}}$ [5 puntos] Supongamos que f es analítica en el disco $D(0,r)=\{z:|z|<r\}$ y que satisface la desigualdad $|f(z)|\le M$ para todo $z\in D(0,r)$. Se pide demostrar que entonces

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\le\frac{2Mr}{|r^2-\overline{z}w|}\,, \qquad \forall z,w\in D(0,r)\,.$$

SOLUCIÓN. Consideremos la función

$$g(z)=\frac{f(rz)}{M}, \qquad g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}.$$

Por el Lema de Schwarz-Pick, para a, $b\in\mathbb{D}$ arbitrarios obtenemos

$$\left|\frac{\frac{f(ra)-f(rb)}{M}}{1-\frac{\overline{f(ra)}f(rb)}{M^2}}\right|=\left|\frac{g(a)-g(b)}{1-\overline{g(a)}g(b)}\right|\le\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|.$$

Escribiendo dos puntos arbitrarios z, $w\in D(0;r)$ como $z=ra$, $w=rb$, a, $b\in\mathbb{D}$, deducimos la desigualdad

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\frac{\overline{f(z)}f(w)}{M^2}}\right|\le Mr\left|\frac{z-w}{r^2-\overline{z}w}\right|$$

y, puesto que $|f(z)|\le M$ para todo $z\in D(0,r)$, de ahí obtenemos que

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\le Mr\left|\frac{1-\frac{\overline{f(z)}f(w)}{M^2}}{r^2-\overline{z}w}\right|\le Mr\frac{1+\left|\frac{\overline{f(z)}f(w)}{M^2}\right|}{|r^2-\overline{z}w|}\le\frac{2Mr}{|r^2-\overline{z}w|}. \qquad \blacksquare$$

Las métricas pseudo-hiperbólica e hiperbólica

$\boxed{\textbf{6)}}$ [5 puntos] Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(\mathbb{D})\Subset\mathbb{D}$ (subconjunto compacto de $\mathbb{D}$). Demostrar que entonces f es contractiva en la métrica hiperbólica d en el sentido de Banach: existe $q\in(0,1)$ tal que

$$d(f(z),f(w))\le q\cdot d(z,w), \quad \forall z,w\in\mathbb{D}.$$

Deducir que f tiene un único punto fijo en $\mathbb{D}$.

SOLUCIÓN. Puesto que $f(\mathbb{D})\Subset\mathbb{D}$, existe $q\in(0,1)$ tal que $|f(z)|\le q$ para todo $z\in\mathbb{D}$. La función $g\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, definida mediante $g(z)=f(z)/q$, satisface $|g(z)|\le 1$ para todo $z\in\mathbb{D}$. Por el Lema de Schwarz-Pick, obtenemos

$$(1-|z|^2)|g'(z)|\le 1-|g(z)|^2, \qquad \forall z\in\mathbb{D}.$$

Por tanto,

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}=\frac{q|g'(z)|}{1-q^2|g(z)|^2}\le q\frac{|g'(z)|}{1-|g(z)|^2}\le\frac{q}{1-|z|^2}.$$

Para a, $b\in\mathbb{D}$ arbitrarios, integrando la desigualdad obtenida a lo largo de cualquier curva γ suave a trozos desde a hasta b, obtenemos

$$\int_{f(\gamma)}\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\int_\gamma\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}|dz|\le q\int_\gamma\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Tomando el ínfimo sobre todas las curvas del tipo indicado, obtenemos $d(f(a),f(b))\le qd(a,b)$, para a y $b\in\mathbb{D}$ arbitrarios, QED. $\blacksquare$

---

8) [5 puntos] Sea f una función entera cuyo módulo es constante en $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Demostrar que $f(z) = cz^n$ para cierta constante $c \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

SOLUCIÓN. Si f tiene una cantidad infinita de ceros en $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$, por el Teorema de unicidad se sigue que $f \equiv 0$ y podemos tomar $c = 0$ (con n arbitrario).
Si f tiene un número finito de ceros en $\overline{\mathbb{D}}$ y tiene algún cero en $\mathbb{T}$, por hipótesis será $|f(z)| = 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$ y, por el Principio del módulo máximo tendremos que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, luego por el Teorema de unicidad $f \equiv 0$ en todo el plano, así que de nuevo estaremos en el caso anterior.
Por tanto, sólo nos queda considerar el caso cuando f tiene un número finito de ceros en $\overline{\mathbb{D}}$ y no tiene ningún cero en $\mathbb{T}$. Sea B un producto de Blaschke con los mismos ceros (y con las mismas multiplicidades) que f en $\mathbb{D}$ (eligiendo un múltiplo constante arbitrario de módulo uno). Entonces f/B es una función con una cantidad finita de singularidades aisladas en $\mathbb{D}$ y, por tanto, puede extenderse de manera habitual para ser analítica en el disco y continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Si $|f(z)| = m$ en $\mathbb{T}$, entonces la función $f/(mB)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, continua en $\overline{D}$ y tiene módulo uno en $\mathbb{T}$. Por consiguiente, es un producto de Blaschke finito. Puesto que ya no tiene ceros en $\mathbb{D}$, se sigue que $f/(mB) \equiv \lambda$, una constante de módulo uno, así que $f(z) = \lambda m B(z) = cB(z)$.
Puesto que f es entera, también lo es B. Entonces todos los ceros de B tienen que ser $= 0$ (de lo contrario, B tendría un polo en el plano). Si n es el grado de B, obtenemos $f(z) = cz^n$. ∎

---

13) [3 puntos] Demostrar que el producto de dos combinaciones convexas de (varios) productos de Blaschke es también una combinación convexa de productos de Blaschke. (Este lema se necesitará en la demostración de un teorema de aproximación de Fisher.)

SOLUCIÓN. Sean $\sum_{j=1}^m s_j B_j$ y $\sum_{k=1}^n t_k C_k$ dos combinaciones convexas de productos de Blaschke finitos, siendo $B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_n$ productos de Blaschke finitos y $\sum_{j=1}^m s_j = 1$, $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, con $s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n \ge 0$. Entonces

$$\left(\sum_{j=1}^m s_j B_j\right)\left(\sum_{k=1}^n t_k C_k\right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n s_j t_k B_j C_k . \tag{2}$$

Observando que el producto de dos productos de Blaschke finitos es otro producto de Blaschke finito (al ser producto de una cantidad finita de automorfismos del disco y dos constantes de módulo uno), que $s_j t_k \ge 0$ para todo j, k y que

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n s_j t_k = \left(\sum_{j=1}^m s_j\right)\left(\sum_{k=1}^n t_k\right) = 1 ,$$

se sigue que el producto en (2) es una combinación convexa de productos de Blaschke finitos. ∎
