Curso Avanzado de Análisis: Ceros e interpolación de funciones analíticas

Máster en Matemáticas y Aplicaciones, UAM, 2020-21

DIARIO DE CLASE (clases impartidas por Teams)

1. M 09/02/2021: (*Presentación, página web, tutorías. Sistema de evaluación, hojas de problemas, apuntes.*) Motivación del contenido del curso: algunos problemas de ceros y de interpolación que se estudiarán. Repaso de la terminología y de algunos conceptos básicos: funciones holomorfas, equivalencia entre la diferenciabilidad compleja y la diferenciabilidad real + las ecuaciones de Cauchy-Riemann, series de potencias, su radio de convergencia y diferenciabilidad, funciones analíticas, equivalencia entre holomorfía y analiticidad. Primer ejemplo de interpolación: interpolación finita polinómica (teorema de Lagrange): existencia y unicidad.

2. J 11/02: Fórmula explicita para el polinomio de interpolación de Lagrange como combinación lineal de polinomios fundamentales. Esquema de interpolación de Hermite (polinomios con valores prescritos y valores prescritos de su derivada): demostración de existencia y unicidad. Preparativos para otro ejemplo de interpolación finita: por autoaplicaciones analíticas del disco. Repaso: Lema de Schwarz, grupo de automorfismos del disco, ejemplos de automorfismos (rotaciones e involuciones, algunas fórmulas útiles), caracterización de los automorfismos del disco, acción transitiva. Lema de Schwarz invariante (Schwarz-Pick), demostración.

3. M, 16/02: La métrica pseudo-hiperbólica (ρ) en el disco y sus propiedades: invarianza por automorfismos, demostración de la desigualdad triangular, desigualdad triangular mejorada. Reformulación del lema de Schwarz-Pick en términos de la métrica pseudo-hiperbólica. Descripción de los discos pseudo-hiperbólicos y coincidencia de las topologías euclídea y pseudo-hiperbólica. Recordatorio: curvas rectificables, integrales de línea complejas. Densidad (elemento de longitud) de una métrica.

4. J, 18/02: La métrica hiperbólica (d) en el disco: definición usando el elemento de longitud (densidad), comprobación que es una métrica. Deducción de la fórmula explícita en términos de la métrica pseudo-hiperbólica, las geodésicas, suma de las distancias a lo largo de una geodésica en las métricas pseudo-hiperbólica e hiperbólica. Ejemplo de una sucesión que no es de Cauchy (mostrando las diferencias entre lo que ven el "ojo euclídeo" y el "ojo hiperbólico"), completitud del disco con la métrica hiperbólica. Modelo de Poincaré de una geometría no euclídea en el disco.

5. M, 23/02: Comentarios acerca de la comparación entre las métricas hiperbólica y pseudo-hiperbólica. Reformulación del lema de Schwarz-Pick en términos de ambas métricas. Productos finitos de Blaschke: ejemplos, primeras propiedades y caracterización en términos de ellas. Teorema de Carathéodory de aproximación puntual de funciones analíticas acotadas por uno por productos de Blaschke finitos; demostración. Comentarios acerca del teorema de Schur (caracterización de las funciones analíticas del disco al disco) y sus relaciones con los restantes resultados. Teorema de Pick-Nevanlinna: enunciado e interpretación del caso $n = 2$.

6. J, 25/02: Correcciones de algunos puntos de la clase anterior; justificaciones mediante el uso de un lema sencillo. Demostración del teorema de Pick-Nevanlinna. Comentarios acerca de las funciones que realizan la interpolación y su unicidad.

7. M, 02/03: Comentarios adicionales sobre los productos de Blaschke finitos: grado de una función racional, ceros y polos; proposición de Fatou (límites de módulo 1 en la circunferencia unidad). Repaso: topología compacta-abierta (convergencia uniforme en los subconjuntos compactos, agotamiento de un dominio por compactos, una métrica en los espacios de funciones continuas y de funciones holomorfas compatible con esta topología, teorema de Weierstrass). El espacio de Banach de funciones analíticas acotadas y su bola unidad (clase de Schur); una versión más fuerte del teorema de Carathéodory: aproximación uniforme en compactos por productos finitos de Blaschke. Algebras de Banach: definición, primeras propiedades, ejemplos: funciones analíticas y acotadas en el disco, operadores acotados en un espacio de Banach, álgebra del disco. Ejemplos de funciones en el álgebra del disco (dilataciones de funciones holomorfas, raíz de una función sin ceros en el disco, una serie de potencias uniformemente convergente en el disco cerrado, combinaciones convexas de los productos finitos de Blaschke). Enunciado del teorema de aproximación de Fisher.

8. J, 04/3: Demostración del teorema de Fisher (densidad de las combinaciones convexas de productos finitos de Blaschke en la bola unidad del álgebra del disco). Repaso de una propiedad básica de los operadores acotados y del teorema de la gráfica cerrada. Un ejemplo de su uso: proposición de Urysohn (el espacio métrico de funciones holomorfas en un dominio con la convergencia uniforme sobre compactos no es normable). Límites radiales: definición, enunciado del teorema de Fatou. Aplicación del semiplano y la función singular interna atómica: un ejemplo de una función acotada de norma uno y con límites radiales en todos los puntos pero que no pertenece al álgebra del disco. El espacio H^2 de Hardy: propiedades básicas, ejemplos de funciones en él.

9. M, 09/03: Propiedades adicionales del espacio H^2 de Hardy: densidad de los polinomios, acotación de las evaluaciones puntuales, núcleo reproductor de Riesz (Szegö), convergencia en norma implica la convergencia uniforme en compactos, monotonía de las medias integrales $M_2(r, f)$; la norma como límite de las medias integrales, inclusión entre las funciones analíticas acotadas y el espacio H^2. Los multiplicadores puntuales de H^2 y su caracterización, acotacion y norma del operador de multiplicación. Aplicación: enunciado y demostración del teorema de Schur (caracterización de las funciones analíícas y acotadas por 1 en términos de sus coeficientes). Los espacios H^p generales: la norma definida como límite de las medias integrales $M_p(r, f)$. Propiedades básicas, diferencias entre los casos $0 < p < 1$ (espacios métricos) y $1 \leq p \leq \infty$ (espacios de Banach), monotonía de las normas y comparaciones entre los espacios.

10. J, 11/03: Completitud de los espacios de Hardy H^p con $1 \leq p < \infty$: demostración. Comentarios acerca del teorema de Hardy sobre el crecimiento de las medias integrales. Repaso: dominios simplemente conexos, curvas y teorema de Jordan, teorema integral de Cauchy-Goursat, enunciado del teorema fundamental sobre los dominios simplemente conexos (9 caracterizaciones equivalentes). Repaso: funciones armónicas, armonicidad del logaritmo de una función analítica sin ceros, existencia y (casi) unicidad de la conjugada armónica en dominios simplemente conexos. Núcleo de Poisson: fórmula explícita, propiedades básicas. Integral de Poisson de una función integrable en la circunferencia unidad. Recordatorio: teorema de aproximación de Weierstrass (para los polinomios trigonométricos). Teorema de Schwarz para la resolución del problema de Dirichlet con los datos continuos en la circunferencia unidad (con demostración incompleta). Propiedad del valor medio para las funciones armónicas y su recíproco. Principio del máximo para las funciones armónicas (versión básica).

11. M, 16/03: Breve repaso: funciones convexas en un intervalo abierto y su continuidad. Desigualdad de Jensen: interpretación probabilística, demostración. Aplicaciones: crecimiento de las medias integrales de orden p en las circunferencias, desigualdad aritmético-geométrica (versiones integral y discreta). Repaso: funciones semicontinuas superiormente y su acotación en compactos. Funciones subarmónicas (definición que admite el valor $-\infty$). Subarmonicidad de las composiciones de una función creciente y convexa con una subarmónica; ejemplos de funciones subarmónicas. Comparación de una función subarmónica y otra armónica en el interior de un compacto a partir de la desigualdad en la frontera. Monotonía de las medias integrales de funciones subarmónicas en el disco, teorema de Hardy: monotonía de las medias integrales $M_p(r, f)$ como funciones de r. Clase de Nevanlinna: motivación (límite de espacios de Hardy cuando $p \to 0^+$)), razones por la que se sustituye la integral de $\log |f|$ por la integral de $\log^+ |f|$. Mención de algunas propiedades que comparten los espacios de Hardy y la clase N.

12. J, 18/03: Valores frontera de las funciones analíticas acotadas: enunciados del teorema de Fatou (límites radiales de las funciones acotadas, con comparación de normas) y límites radiales de las integrales de Poisson de funciones absolutamente integrables en la circunferencia. Versión generalizada de la fórmula integral de Cauchy para las funciones analíticas acotadas en el disco (para la integral de los valores frontera sobre la circunferencia), con demostración. Caracterización de los valores frontera de las funciones de H^∞ en términos de los coeficientes de Fourier (con demostración). Teorema de unicidad: versión débil (si los valores frontera de una función analítica y acotada se anulan en casi todo punto de un arco, la función es idénticamente cero), con demostración. Comienzo de los estudios de los ceros: un lema preparatorio, fórmula de Jensen (con demostraciones).

13. L, 22/03: Aplicación de la fórmula de Jensen: monotonía de las integrales de $\log |f|$ de una $f \in H^\infty$, relación con las medias de la función frontera f^* (con demostración). Corolario: integrabilidad de $\log |f^*|$, versión fuerte del teorema de unicidad en la frontera. Repaso: productos infinitos (numéricos): definición de convergencia, uso de la determinación principal del logaritmo, criterio de convergencia en términos de la suma asociada (con demostración), convergencia absoluta y criterio para ella (con demostración), ejemplos. Corolario (convergencia de productos de números positivos menores que 1) y su uso para demostrar la caracterización de las sucesiones de ceros de las funciones en N (condición de Blaschke).

14. J, 25/03: Corolarios inmediatos de la condición de Blaschke. Repaso: productos infinitos (funcionales): un lema técnico, un teorema y su corolario que garantizan la convergencia y caracterizan las multiplicidades de los ceros del producto. Aplicación: teorema de Blaschke acerca de la convergencia y las propiedades inmediatas de los productos de Blasche infinitos, resolución del problema de caracterizar los ceros de las funciones en N y H^p. Módulo de los límites radiales de los productos de Blaschke y el limite de la integral del logaritmo. Teorema: los productos de Blaschke son divisores isométricos en N y en cada H^p.

15. M, 06/04: Técnica de factorización de Riesz. Un ejemplo a desarrollar. Los valores frontera de una función H^p son p-integrables en la circunferencia. Repaso: familias normales, teorema de Montel, ejemplos. Fórmula de Poisson-Jensen. Teorema de F. y R. Nevanlinna: demostración con el uso de familias normales y de la fórmula de Poisson-Jensen. Algunos corolarios. Existencia de límites radiales en casi todo punto para las funciones en N.

16. J, 08/04: Corolario: integrabilidad del logaritmo de los límites radiales para las funciones en espacios de Hardy. Lema de Riesz para la convergencia en norma de $L^p(X, \mu)$ (demostración de Novinger). Teorema de Riesz sobre la convergencia en media de orden p de los límites radiales de las funciones en H^p. Corolario para la característica de Nevanlinna; un ejemplo relevante. Discusión de las formas alternativas para calcular la norma en H^p. Teorema de los hermanos Riesz: representación de las funciones H^1 como integrales de Poisson de funciones integrables en la circunferencia unidad. Generalización para otros espacios de Hardy (sin demostración). El espacio $\mathcal{H}^p$ de los valores frontera de las funciones H^p, visto como cierre de los polinomios trigonométricos en $L^p(\mathbb{T})$.

17. M, 13/04: Teorema de Smirnov: caracterización de H^p, $1 \le p \le \infty$, como subespacio de $L^p(\mathbb{T})$ en términos de los coeficientes de Fourier. Corolario: comportamiento de los coeficientes de Taylor de una función H^1; un ejemplo relevante. La desigualdad logarítmica para los valores frontera de las funciones en espacios de Hardy. Teorema de Smirnov (caracterización de la pertenencia de una $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ a H^p en términos de la existencia de mayorante armónica de $|f|^p$). Corolario: acotación de los operadores de composición en los espacios de Hardy. Repaso: funciones de variación acotada (ejemplos y propiedades básicas).

18. J, 15/04: Representación de las funciones de variación acotada como difererencia de dos monótonas. Propiedades adicionales. Integral de Riemann-Stieltjes: definición, ejemplos (con una función escalonada como integrador). Propiedadades básicas, teoremas de existencia. El espacio de las funciones $BV[a, b]$ normalizadas. Teorema de representación de Riesz: el dual de $C[a, b]$ (enunciado y comentarios). Las convergencias fuerte y débil, la convergencia débil-$*$ en el dual. Teorema de Banach-Alaoglu; caso especial: teorema de selección de Helly. Las integrales de Poisson-Stieltjes de una función de variación acotada.

19. M, 20/04: Los espacios h^p armónicos de Hardy: definición y propiedades básicas. Teorema de Plessner de representación de las funciones en h^1 (como diferencias de funciones armónicas positivas y como integrales de Poisson-Stieltjes). Corolario de la demostración: teorema de representación de Herglotz (para las funciones armónicas positivas y para las analíticas con parte real positiva). Identificación de la función de variación acotada en la representación con una medida (positiva o con signo), demostración de la unicidad de la medida en las representaciones de Herglotz y Plessner. Preludio del teorema de Fatou: existencia de límites radiales de las integrales de Poisson-Stieltjes de las funciones integrables en los puntos de continuidad. Derivada simétrica y su relación con la derivada habitual. Demostración de la forma débil (existencia de los límites radiales) del teorema de Fatou para las funciones en h^1. Breve repaso: funciones absolutamente continuas. Corolario del teorema de Fatou: existencia de límites radiales de las integrales de Poisson-Stieltjes de funciones integrables en casi todo punto.

20. J, 22/04: Comentarios sobre la extensión del teorema de Fatou a H^1 y a toda la clase N y otros espacios de Hardy. Repaso de las funciones singulares y de algunos resultados importantes de la medida: medidas mutuamente singulares, una medida absolutamente continua respecto a otra, teorema de Radon-Nikodym, descomposición de Lebesgue de la medida. Funciones internas, singulares internas y externas de H^p. Demostración del teorema de factorización canónica (Smirnov). Ejemplos de funciones internas y externas. Subespacios invariantes; operador de desplazamiento y sus propiedades básicas.

21. M, 27/04: Descripción de los subespacios S-invariantes de H^2: teorema de Beurling, demostración de Helson y Lowdenslager. El subespacio S-invariante generado por una función (el subespacio S-invariante mínimo que la contiene), vectores cíclicos. Descripción del espacio generado por una función en términos de su factor interno; caracterización de los vectores cíclicos de H^2 en términos de las funciones externas. Generalización a otros espacios de Hardy (Srinivasan-Wang): enunciado. Dos teoremas de aproximación por productos de Blaschke y sus combinaciones convexas (Frostman, Marshall): sólo enunciados. Teorema de los hermanos Riesz, interpretado de dos maneras y con demostración. Representación de una función armónica en el disco como suma de una analítica y otra anti-analítica; caso de una armónica en h^2. Identificación de una función en $L^2(\mathbb{T})$ con una función armónica en el disco (perteneciente a h^2). La proyección ortogonal de Riesz de $L^2(\mathbb{T})$ sobre H^2. Una fórmula explícita. Equivalencia entre la acotación de la proyección de Riesz como operador de $L^p(\mathbb{T})$ en H^p y la acotación de la conjugada armónica como operador en h^p, $1 < p < \infty$.

22. J, 29/04: Enunciados del teorema de M. Riesz para la conjugada armónica de una función en h^p (equivalentemente, acotación de la proyección de Riesz), $1 < p < \infty$, y del teorema Kolmogórov para la conjugada armónica de una función h^1. Enunciado cuantitativo del teorema de Gohberg-Krupnik y Hollenbeck-Verbitsky: norma de la proyección de Riesz. Espacios de Bergman: definición, inclusión contractiva de H^p en A^p, deducción de las fórmulas para el producto escalar y la norma en H^2. Versiones para la integral del área de la propiedad del valor medio y de la desigualdad del valor medio, acotación de las evaluaciones puntuales en A^p, propiedades básicas de los espacios A^p. Algunas diferencias entre los espacios de Hardy y Bergman, ejemplo de una función (dada por serie lagunar) que está en todos los espacios de Bergman y no está en ninguno de Hardy. Núcleo reproductor de Bergman, fórmula explícita para el núcleo. Proyección de Bergman, su extensión a otros espacios L^p. Teorema de Zaharjuta y Yudovich: idea de la demostración de Forelli y Rudin (usando el operador sublineal asociado). Enunciado de la caracterización del espacio dual de A^p, $1 < p < \infty$. Un problema abierto: calcular el valor exacto de la proyección de Bergman; enunciado de los resultados de Zhu y Dostanić.

23. M, 04/05: Condiciones radiales de crecimiento que implican, o se siguen de, la pertenencia a A^p. Estimaciones para la función de contar (los ceros) para una sucesión de Blaschke y para una función perteneciente a un espacio de Bergman (Shapiro y Shields). Una condición más débil que la de Blaschke que satisfacen los ceros de las funciones A^p; demostración con el uso de la fórmula de Jensen y la integración por partes para la integral de Riemann-Stieltjes. Definición de un conjunto de ceros; algunas propiedades obvias de los conjuntos de ceros para H^p (de las sucesiones de Blaschke). Un lema técnico y la construcción de una función en A^p cuyos ceros no satisfacen la condición de Blaschke. Los teoremas de Horowitz acerca de los conjuntos de ceros de los espacios A^p (dependencia de p, comportamiento respecto a los subconjuntos y uniones); idea de la demostración y un corolario acerca de la imposibilidad de factorización en A^1 que se tiene en H^1. Mención de la descripción de Korenblum de los conjuntos de ceros de la unión de los espacios de Bergman. Teorema de Horowitz sobre el orden de crecimiento de los productos parciales de los módulos de los ceros de una función A^p; demostración con el uso de la fórmula de Jensen. Mención de la imposibilidad de divisores isométricos y el descubrimiento de los divisores contractivos para A^p (Horowitz, Hedenmalm, Duren-Khavinson-Shapiro-Sundberg).

24. J, 06/05: Repaso: funciones univalentes y localmente univalentes, ejemplos, caracterización de la univalencia local en términos de la derivada. Propiedad conforme. Repaso: teorema de la aplicación (representación conforme) de Riemann, enunciado y resumen de la idea de la demostración. Teorema de Hurwitz y su corolario para los límites de funciones univalentes en la topología compacta-abierta, con demostraciones. La clase S de funciones univalentes normalizadas, ejemplos, algunas transformaciones que la preservan (raíces). Enunciados de los teoremas de distorsión, crecimiento y estimaciones de los coeficientes (Bieberbach, de Branges). Teorema de Prawitz: toda función univalente está en H^p, $0 < p < 1/2$; demostración de Pommerenke para $p \leq 2/5$ usando Parseval y la transformada raíz quinta. Factorización canónica de las funciones univalentes.

25. M, 11/05: Repaso: curvas de Jordan, teorema de Jordan (sin demostración). Teorema de extensión de Carathéodory. Relación entre la rectificabilidad de una curva de Jordan y la pertenencia a H^1 de la derivada de la aplicación conforme de Riemann del disco unidad sobre el dominio acotado por la curva (demostración de Beckenbach de una de las aplicaciones); fórmula para la longitud en términos de la norma H^1 de la derivada. Teorema de Hardy y Littlewood: $H^p \subset A^{2p}$ y su versión cuantitativa para las normas (Carleman). Discusión de la igualdad. Aplicación: demostración de la desigualdad isoperimétrica. Demostración que quedaba pendiente: $\log|f|$ es subarmónica en el disco cuando f es holomorfa. Comentarios sobre el trabajo de fin de curso y la última hoja de problemas.

26. J, 13/05: Problema de interpolación para las funciones enteras (sin condiciones especiales). Repaso: factorización de funciones enteras (factores elementales y canónicos de Weierstrass, demostración del teorema de Weierstrass, factorización de la función seno). Funciones meromorfas en el plano, representación como cociente de dos enteras (corolario del teorema de factorización de Weierstrass). Teorema de Mittag-Leffler para las funciones meromorfas en el plano (esbozo de la demostración). Ejemplo con la función cosecante al cuadrado: desarrollo en serie con la parte principal de Laurent en cada polo. Solución del problema de interpolación para las funciones enteras: teorema de Guichard.

27. M, 18/05: Problema de interpolación universal de R.C. Buck. Sucesiones uniformemente discretas (separadas en la métrica hiperbólica, equivalentemente, en la pseudo-hiperbólica). Dos ejemplos: puntos en un radio y puntos equidistribuidos en circunferencias concéntricas. Sucesiones uniformemente separadas. Observación: sucesión interpolante implica uniformemente separada. Enunciado del teorema de interpolación de Carleson. Mención de los resultados de Hayman, Newmann, Shapiro y Shields y Kabaĭla. Ejemplos de sucesiones uniformemente separadas: sucesiones exponenciales. Recíproco parcial: toda sucesión uniformemente separada en un radio es exponencial. Relaciones entre las sucesiones uniformemente separadas y uniformemente discretas y las de Blaschke. Ejemplo de una sucesión uniformemente discreta que no es uniformemente separada.

28. J, 20/05: