9 M, 9/3/2021

PROPIEDADES BÁSICAS DE H^2

Prop. Los polinomios son densos en H^2.

Dem. $\square$ Sea $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ en $\mathbb{D}$ y $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ su polinomio de Taylor de orden n. Entonces

$$\|f-P_n\|_{H^2}^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2\to 0,\ n\to\infty.\ \boxtimes$$

Observaciones. 1) La demostración indica que se cumple algo más fuerte que lo afirmado: podemos aproximar f en la norma H^2 por sus propios polinomios de Taylor: $P_n\to f$ en $\|\cdot\|_{H^2}$.

2) Existen espacios de funciones analíticas en el disco en los que los polinomios son densos y que, sin embargo, no tienen esta propiedad. Uno de ellos es el espacio de Hardy H^1 que se definirá más adelante.

Prop. $\forall f\in H^2\ \forall \zeta\in\mathbb{D}$, $|f(\zeta)|\le \dfrac{\|f\|_{H^2}}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}$.

La igualdad se tiene $\iff$ $f(z)=\dfrac{c}{1-\bar{\zeta}z}$, $c\in\mathbb{C}$.

Dem. $\square$ Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$|f(\zeta)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n\right|\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^{2n}\right)^{1/2}=\frac{\|f\|_{H^2}}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}.$$

La igualdad se tiene $\iff \exists c\in\mathbb{C}$ t.q. $\forall n\ge 0$, $a_n=c\bar{\zeta}^n$, la sucesión de coeficientes de Taylor correspondiente a la función

$$f(z)=c\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\zeta}^n z^n=\frac{c}{1-\bar{\zeta}z}.$$

Comentarios. (1) Si definimos el funcional de evaluación puntual en ζ, $\Lambda_\zeta: H^2\to\mathbb{C}$, $\Lambda_\zeta f=f(\zeta)$, obviamente es un funcional lineal. La Proposición anterior nos dice que es un funcional continuo (acotado) y que su norma es exactamente $\|\Lambda_\zeta\|=\dfrac{1}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}$.

(2) Las funciones para las que se obtiene la igualdad suelen llamarse funciones extremales (para el problema extremal de determinar

$$\|\Lambda_\zeta\| = \sup\left\{ \frac{|\Lambda_\zeta(f)|}{\|f\|_{H^2}} : f\in H^2, f\neq 0\right\} = \sup\left\{ |\Lambda_\zeta(f)| : \|f\|_{H^2}=1\right\}).$$

Las funciones extremales para el primer supremo, como acabamos de ver, son $f(z)=\dfrac{c}{1-\bar\zeta z}$ pero si las queremos normalizar (para el segundo supremo), entonces hay más restricciones:

$$1=\|f\|_{H^2}^2=|c|^2\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^{2n}=\frac{|c|^2}{1-|\zeta|^2} \Rightarrow |c|=\sqrt{1-|\zeta|^2} \Rightarrow$$

las extremales son las rotaciones (múltiplos de λ, con $|\lambda|=1$) de la función

$$f_\zeta(z)=\frac{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}{1-\bar\zeta z}, \quad z\in\mathbb{D}.$$

(3) Según el Teorema de representación de Riesz (para los espacios de Hilbert), para cada funcional acotado Λ_ζ existe un único elemento $k_\zeta\in H^2$ tal que $\Lambda_\zeta(f)=\langle f,k_\zeta\rangle$, $\forall f\in H^2$. La función k_ζ se denomina núcleo reproductor para H^2 para el punto $\zeta\in\mathbb{D}$. También es conocido históricamente como núcleo de Riesz (o de Szegő).

Vamos a determinar k_ζ.

Prop. $k_\zeta(z)=\dfrac{1}{1-\bar\zeta z}$, $z\in\mathbb{D}$.

Dem. $\square$ $k_\zeta\in H^2 \Rightarrow k_\zeta\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Sea $k_\zeta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ su serie de Taylor en $\mathbb{D}$. Para $f\in H^2$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, obtenemos

$$f(\zeta)=\Lambda_\zeta f=\langle f,k_\zeta\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar c_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n.$$

Eligiendo, para cada $k\geq 0$, $f(z)=z^k$, obtenemos $\bar c_k=\zeta^k$. Luego

$$k_\zeta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar\zeta^k z^k=\frac{1}{1-\bar\zeta z}. \quad \boxtimes$$

Corolario. Si $f_n\to f$ en (la norma de) H^2, entonces $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\forall K\in\mathbb{D}$.

Dem. $\square$ Si $K \Subset \mathbb{D}$, $\exists r \in (0,1)$ t.q. $\forall z \in K$, $|z| \le r \Rightarrow$

$$|f_n(z) - f(z)| \le \frac{\|f_n - f\|_{H^2}}{(1-|z|^2)^{1/2}} \le \frac{\|f_n - f\|_{H^2}}{(1-r^2)^{1/2}} \underset{K}{\rightrightarrows} 0, \quad n \to \infty. \; \boxtimes$$

Teorema. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces la media integral

$$M_2(r,f) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2}$$

es una función creciente de r. Además,

$$f \in H^2 \iff \lim_{r \to 1^-} M_2(r,f) < \infty.$$

En este caso,

$$\lim_{r \to 1^-} M_2(r,f) = \|f\|_{H^2}.$$

[Esto motivará una definición más general, que veremos a continuación.]

Dem. $\square$ Sea $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{e^{i\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Consideremos el espacio $L^2(\mathbb{T})$ respecto a la medida $dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$. El conjunto de funciones $\{f_n(\theta) = e^{in\theta} : n = 0,1,2,\dots\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$.

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Escribiendo $z \in \mathbb{D}$ como $z = re^{i\theta}$ y

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n f_n(\theta),$$

considerando f como una función definida formalmente en $\mathbb{T}$ para cada r fijo, vemos que $f \in L^2(\mathbb{T})$. En efecto, el radio de convergencia de la serie de potencias que define f es ≥ 1, luego $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le 1$, así que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \ge N$ $|a_n| \le (1+\varepsilon)^n$. Para cada $r \in [0,1)$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ de manera que $(1+\varepsilon)r < 1$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|^2$ es una serie convergente, luego para cada $r \in [0,1)$ fijo, $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Por las propiedades básicas de la ortogonalidad, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n f_n \Big\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \Big\langle \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m f_m, \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n f_n \Big\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n}\, r^{m+n} \langle f_m, f_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

ya que $\langle f_m, f_n\rangle = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$. El intercambio de la suma y el producto escalar está justificado por la convergencia de la última serie (ya establecida), para cada r fijo.

Observemos que la suma $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ es una función creciente de $r\in[0,1)$, luego también lo es la integral $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$.

Cuando $f\in H^2$, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$, luego existe el límite

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2.$$

Recíprocamente, si $\exists \lim_{r\to 1^-} M_2(r,f)$, entonces $\exists \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$. $\boxtimes$

<u>Corolario.</u> $H^\infty \subseteq H^2$. De hecho, $\forall f\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $\|f\|_{H^2} \le \|f\|_{H^\infty}$.
La igualdad se cumple para las funciones constantes. (Luego veremos que también para algunas otras, llamadas funciones internas.)

<u>Dem.</u> $\square$ $f\in H^\infty \Rightarrow \forall z\in\mathbb{D}$, $|f(z)|\le \|f\|_\infty \Rightarrow$

$$M_2^2(r,f) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \le \int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_\infty^2.$$

Tomando $\lim_{r\to 1^-}$, obtenemos $\|f\|_{H^2}^2 \le \|f\|_\infty^2$.

La igualdad para las constantes es obvia. $\boxtimes$

• Esto nos dice que el operador $I: H^\infty \to H^2$, $If=f$, tiene norma 1.

<u>Definición.</u> Sea $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$. Si $\forall f\in H^2$, $\varphi f\in H^2$, diremos que φ es un <u>multiplicador</u> <u>puntual de</u> H^2.
En este caso, podemos definir el operador de multiplicación $M_\varphi: H^2\to H^2$ como $M_\varphi f = \varphi f$.

<u>Notación.</u> $\varphi H^2 \subseteq H^2$ (a veces, $\varphi\in \mathcal{M}(H^2)$).

Observaciones. 1) El concepto de multiplicador puede definirse para cualquier espacio de Banach X cuyos elementos $\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ o entre dos espacios distintos, incluso para otros tipos de funciones.

2) Es evidente que $\varphi H^2 \subseteq H^2 \Rightarrow \varphi \in H^2$ (tomando $f \equiv 1$).

Prop. $\varphi H^2 \subseteq H^2 \Leftrightarrow \varphi \in H^\infty$. De hecho, $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Además, $\forall f \in H^2$, $\|\varphi f\|_{H^2} \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{H^2}$.

Dem. $\square$ $(\Leftarrow)$: $\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leq \|\varphi\|_\infty^2 \cdot \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$.

Ambos lados de la desigualdad son funciones crecientes de r. Por tanto, tomando $\limsup_{r\to 1^-}$, éste se convierte en $\lim_{r\to 1^-}$, obteniendo

$$\|\varphi f\|_{H^2}^2 \leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_{H^2}^2 \Rightarrow \|\varphi f\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2.$$

$(\Rightarrow)$: Supongamos que $\varphi H^2 \subseteq H^2$. Entonces $\varphi \in H^2$, como ya observamos.

Veamos primero que $M_\varphi : H^2 \to H^2$ es un operador acotado. (Es obvio que es lineal).

$f_n \in H^2$, $f_n \to f$ en H^2, $M_\varphi f_n = \varphi f_n \to g$ en $H^2 \Rightarrow f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\varphi f_n \underset{K}{\rightrightarrows} g$ $\forall K \Subset \mathbb{D}$ (por una Prop. vista antes). Weierstrass $\Rightarrow g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$; además, $\varphi f_n \underset{K}{\rightrightarrows} \varphi f$ $\left(|\varphi f_n - \varphi f| \leq \max_K |\varphi| \cdot |f_n - f|\right)$ y, por tanto, $g = \varphi f = M_\varphi f$.

Conclusión: la gráfica de M_φ es cerrada. H^2 es Hilbert. Por el Teorema de la gráfica cerrada, $M_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$.

Para $\zeta \in \mathbb{D}$ y $f \in H^2$ cualesquiera, la estimación puntual (Prop. de la página 1) implica

$$(1-|\zeta|^2)^{1/2} |\varphi(\zeta) f(\zeta)| \leq \|\varphi f\|_{H^2} \leq \|M_\varphi\| \cdot \|f\|_{H^2}. \quad (*)$$

Eligiendo $f = f_\zeta$, la función extremal para Λ_ζ como antes: $f_\zeta(z) = \frac{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}{1-\bar{\zeta} z}$, vemos que $\|f_\zeta\|_{H^2}=1$ y $|f_\zeta(\zeta)|=\dfrac{1}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}$. Por tanto,

$$(*) \Rightarrow |\varphi(\zeta)| \le \|M_\varphi\|.$$

Esto se cumple $\forall \zeta\in\mathbb{D}$. Tomando $\sup\limits_{\zeta\in\mathbb{D}}$, obtenemos $\|\varphi\|_\infty \le \|M_\varphi\|$, así que $\varphi\in H^\infty$.

Ya sabemos que $\quad \|\varphi f\|_2 \le \|\varphi\|_\infty \|f\|_2 \quad, \forall f\in H^2$

$$\Rightarrow \|M_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty.$$

Por tanto, $\quad \|M_\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty. \qquad \boxtimes$

- Ahora ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar la caracterización de Schur de las funciones analíticas en el disco y acotadas por 1 (la bola unidad de H^∞) en términos de sus coeficientes de Taylor.

El resultado se puede enunciar de otra manera pero siempre se tiene que imponer una cantidad infinita (numerable) de condiciones sobre los coeficientes.

<u>Teorema. (Schur, 1917).</u> Sea $\varphi\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, con la serie de Taylor $\varphi(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ en $\mathbb{D}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\forall z\in\mathbb{D}$, $|\varphi(z)|\le 1$;

(b) $\forall N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\forall \lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N\in\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^N \left|\sum_{n=k}^N a_{n-k}\lambda_n\right|^2 \le \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^2. \qquad (**)$$

- Para ver lo que dice la condición (b), podemos escribir también

$$\sum_{k=0}^N \left|\sum_{n=k}^N a_{n-k}\lambda_n\right|^2 = \sum_{k=0}^N \left|\sum_{j=0}^{N-k} a_j \lambda_{j+k}\right|^2.$$

Las condiciones (**) nos indican que:

$N=0$: $|a_0\lambda_0|^2 \le |\lambda_0|^2$, $\forall \lambda_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow |a_0| \le 1$.

$N=1$: $|a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1|^2 + |a_0\lambda_1|^2 \le |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2$, $\forall \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, etc.

Dem. □ (R.A. Kortram, 2001) Por la Prop. anterior,

(a) $\Leftrightarrow \|\varphi\|_\infty \le 1$

$\Leftrightarrow$ (a'): $\varphi H^2 \subseteq H^2$ y $\|M_\varphi\| \le 1$.

Por tanto, basta ver que (a') $\Leftrightarrow$ (b).

(a') $\Rightarrow$ (b): Sea $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión t.q. $\mu_{N+1} = \mu_{N+2} = \dots = 0$

y consideremos $\varphi(z) = \sum_{k=0}^N \mu_k z^k$; $\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^N |\mu_k|^2$.

$$M_\varphi f(z) = \varphi(z) f(z) = \sum_{m=0}^\infty \left(\sum_{j=0}^m a_{m-j}\mu_j \right) z^m,$$

un caso especial de la fórmula básica para multiplicar dos series de potencias, convergentes en el mismo disco:

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$
$$c_m = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0 = \sum_{j=0}^m a_{m-j} b_j.$$

Sabemos que $\|M_\varphi\| \le 1 \Rightarrow \forall f \in H^2$, $\|M_\varphi f\|_2^2 \le \|f\|_2^2 \Rightarrow$

$$\sum_{m=0}^N \left| \sum_{j=0}^m a_{m-j}\mu_j \right|^2 \le \sum_{m=0}^\infty \left| \sum_{j=0}^m a_{m-j}\mu_j \right|^2 \le \sum_{k=0}^N |\mu_k|^2.$$

Dada una sucesión $(\lambda_n)_{n=0}^N$ arbitraria, podemos elegir

$\mu_k = \lambda_{N-k}$, para $k = 0, 1, \dots, N$, $\mu_{N+1} = \mu_{N+2} = \dots = 0$.

Así obtenemos que
$$\sum_{m=0}^N \left| \sum_{j=0}^m a_{m-j}\lambda_{N-j} \right|^2 \le \sum_{k=0}^N |\mu_k|^2 = \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^2.$$

Haciendo el cambio de índices $m = N-k$, $j = N-n$, vemos que

$$\sum_{k=0}^{N}\left|\sum_{n=k}^{N} a_{n-k}\lambda_n\right|^2 \leq \sum_{k=0}^{N}|\lambda_k|^2$$

y así $\forall N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a'): Supongamos que para cada $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y para toda sucesión $(\lambda_n)_{n=0}^{N}$ se satisface (**).

Eligiendo $\lambda_n = z^n$, $z\in\mathbb{D}$, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N}\left|\sum_{n=k}^{N} a_{n-k} z^n\right|^2 \leq \sum_{k=0}^{N}|z|^{2k} = \frac{1-|z|^{2N+2}}{1-|z|^2}.$$

Tomando $\lim\limits_{N\to\infty}$, se sigue que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^n\right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|z|^{2k}\left|\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{n-k}\right|^2$$

$$\overset{(n-k=j)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}|z|^{2k}\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right|^2$$

$$= \frac{1}{1-|z|^2}\cdot|\varphi(z)|^2 \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

$N\to\infty$

$\Longrightarrow |\varphi(z)|\leq 1$, $\forall z\in\mathbb{D} \Rightarrow \varphi H^2\subseteq H^2$ y $\|M_\varphi\|\leq 1$. $\boxtimes$

ESPACIOS DE HARDY: CASO GENERAL

Def'n. Sea $0<p<\infty$ y $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Las medias integrales de orden p de f se definen como

$$M_p(r,f) = \left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}},\quad 0\leq r<1,$$

entendiendo que

$$M_p(0,f) = \lim_{r\to 0^+} M_p(r,f) = |f(0)|.$$

(El intercambio del límite y la $\int_0^{2\pi}$ es fácil de justificar, por ejemplo, usando la acotación uniforme de $|f|^p$ en cualquier disco $\bar{D}(0;R)=\{z:|z|\le R\}$ con $0<R<1$ y el Teorema de la convergencia dominada.)

Si existe $\lim\limits_{r\to 1^-} M_p(r,f)$, diremos que f pertenece al espacio de Hardy H^p y definiremos

$$\|f\|_{H^p}=\|f\|_p=\lim_{r\to 1^-} M_p(r,f).$$

• Observaciones. (1) Ya hemos considerado H^2; la definición coincide. Para $p\neq 2$, no tenemos fórmulas para $\|f\|_p$ en términos de los coeficientes.

(2) Veremos más adelante que $M_p(r,f)$ es una función creciente de r para cualquier f fija y p fijo, no sólo para $p=2$. (Para ello, necesitaremos varios hechos relacionados con la subarmonicidad.) Por tanto, se seguirá que

$$\|f\|_p=\lim_{r\to 1^-} M_p(r,f)=\sup_{0\le r<1} M_p(r,f)$$

y en muchos textos se usa la definición con el supremo.

(3) Para $p=\infty$, entendemos (caso límite cuando $p\to\infty$) que

$$M_\infty(r,f)=\operatorname*{sup\,ess}_{|z|=r}|f(z)|=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

de nuevo una función creciente de r, por el Principio del módulo máximo. Aplicando la misma definición que para los H^p restantes, obtenemos el espacio ya conocido H^∞.

(4) Sea $1\le p<\infty$, aplicando la desigualdad de Minkowski a las medias M_p, vemos que

$$M_p(r,f+g)=\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})|^p\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= M_p(r,f)+M_p(r,g).$$

Tomando el límite cuando $r\to 1^-$, concluimos que

$$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p. \qquad \text{(desigualdad triangular)}$$

Por lo tanto, además de ser un espacio vectorial, H^p es un espacio normado, siendo las restantes propiedades de la norma bastante obvias.

(5) Sea $0<p<1$. Entonces $\|f\|_p$ ya no es una norma.

Ejercicio. Encontrar un ejemplo concreto de $f,g\in H^p$, $0<p<1$, que no satisfagan la desigualdad triangular.

Sin embargo, $d_p(f,g)=\|f-g\|_p^p=\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})-g(re^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}$ define una métrica en H^p, $0<p<1$.

Dicha métrica es invariante por traslaciones: $d_p(f-h,g-h)=d_p(f,g)$.

(6) Para $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $\|f\|_p$ es una función creciente de p: si $u<v$, la desigualdad de Hölder con $p=\frac{v}{u}>1$ y su exponente conjugado p' $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ implica

$$M_u(r,f)=\left(\int_0^{2\pi}|f|^u dm\right)^{\frac{1}{u}}=\left(\int_0^{2\pi}|f|^u\cdot 1\,dm\right)^{\frac{1}{u}}\leq\left(\int_0^{2\pi}|f|^{u\cdot p}dm\right)^{\frac{1}{u}\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}1^{p'}dm\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}|f|^v dm\right)^{\frac{1}{v}}=M_v(r,f)\ ;\ \lim_{r\to 1}:\quad \|f\|_u\leq\|f\|_v.$$

Por tanto, de entre todos los H^p que son espacios normados, H^∞ es el más pequeño y H^1 es el más grande. (Entre los que son sólo métricos, no existe ni el más pequeño ni el más grande.)

(7) Todos los espacios H^p, $0<p\leq\infty$, son completos. (Ya lo hemos visto para H^∞.) Lo probaremos en breve.