⑧ J, 04/03/2021

Demostración del Teorema de Fisher: las combinaciones convexas de los productos finitos de Blaschke son densas en la bola unidad del álgebra del disco, $\mathcal{A}$ (en la norma $\|\cdot\|_\infty$ del espacio).

$\square$ Sea $f \in \mathcal{A}$ con $\|f\|_\infty \leq 1$. Entonces $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Por el Teorema de Cantor, f es uniformemente continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Para $0 \leq r < 1$, puesto que $|z - rz| = |z|(1-r) \leq 1 - r \to 0$, cuando $r \to 1^-$, independientemente de z, se sigue de la continuidad uniforme de f en $\overline{\mathbb{D}}$ que

$$\|f - f_r\|_\infty = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - f(rz)| \to 0, \quad r \to 1^-.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists r \in [0,1)$ tal que $\|f - f_r\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Puesto que $r\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq r\} \subset \mathbb{D}$, por el Teorema de Carathéodory, $\exists B$, producto de Blaschke finito tal que

$$\max_{z \in r\overline{\mathbb{D}}} |f(z) - B(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observando que la dilatación B_r de B satisface

$$\|f_r - B_r\|_\infty = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f_r(z) - B_r(z)| = \max_{w \in r\overline{\mathbb{D}}} |f(w) - B(w)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

concluimos que

$$\|f - B_r\|_\infty \leq \|f - f_r\|_\infty + \|f_r - B_r\|_\infty < \varepsilon.$$

Sólo nos queda comprobar que B_r es una combinación convexa de productos de Blaschke finitos para completar la prueba. Veámoslo.

Basta demostrar esta afirmación para la dilatación de un automorfismo. Razón: todo producto de Blaschke finito es producto finito de automorfismos (y una constante de módulo 1) y es fácil ver que, para $g, h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$:

$(gh)_r = g_r h_r$ (trivial)

y que el producto de dos combinaciones convexas de productos de Blaschke finitos también es una combinación convexa de productos de Blaschke finitos (Hoja 1-A, Ejercicio 13), así que la afirmación se sigue por inducción sobre el grado de B.

Sea entonces $B(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. Considerando la diferencia

$$B_r(z) - \frac{r(1-|a|^2)}{1-|a|^2r^2}\cdot\varphi_{ar}(z) = \frac{a-rz}{1-\bar{a}rz} - \frac{r(1-|a|^2)}{1-|a|^2r^2}\,\frac{ar-z}{1-\bar{a}rz}$$

$$= \frac{1}{(1-|a|^2r^2)(1-\bar{a}rz)}\Big[(a-rz)(1-|a|^2r^2) - (1-|a|^2)(ar^2-rz)\Big]$$

$$= \frac{a+|a|^2r^3z - ar^2 - |a|^2rz}{(1-|a|^2r^2)(1-\bar{a}rz)} = \frac{(1-r^2)(a-|a|^2rz)}{(1-|a|^2r^2)(1-\bar{a}rz)} = \frac{(1-r^2)a}{1-|a|^2r^2},$$

concluimos que

$$B_r(z) = \frac{r(1-|a|^2)}{1-|a|^2r^2}\underbrace{\varphi_{ar}(z)}_{\substack{\text{producto}\\ \text{de Blaschke}\\ \text{de grado 1}}} + \frac{(1-r^2)|a|}{1-|a|^2r^2}\underbrace{e^{i\arg a}}_{\substack{\text{producto}\\ \text{de Blaschke}\\ \text{de grado 0}}}$$

$$= \text{lo mismo} + \frac{(1-r)(1-|a|)}{1+r|a|}\cdot 0$$

$$= \text{lo mismo} + \frac{(1-r)(1-|a|)}{2(1+r|a|)}\cdot \underline{1} + \frac{(1-r)(1-|a|)}{2(1+r|a|)}\cdot \underline{(-1)},$$

productos de Bl. de gr. 0

siendo los 4 coeficientes ≥ 0 y su suma:

$$\frac{r(1-|a|^2)}{1-|a|^2r^2} + \frac{(1-r^2)|a|}{1-|a|^2r^2} + \frac{(1-r)(1-|a|)}{(1+r|a|)}\cdot\frac{1-r|a|}{1-r|a|}$$

$$= \frac{(r-r|a|^2)+(|a|-r^2|a|)+(1-r-|a|+r|a|)(1-r|a|)}{1-|a|^2r^2} = \frac{1-|a|^2r^2}{1-|a|^2r^2} = 1 \; (!!)$$

$\boxtimes$

Un inciso sobre los operadores acotados y $H(\Omega)$

• Ya hemos repasado el concepto de operador lineal acotado, pero conviene mencionar más propiedades que se podrían necesitar en cualquier momento. Por ejemplo, el siguiente resultado es básico y muy útil. (Véase el texto de Conway de Análisis Funcional o los apuntes de J. García-Cuerva, UAM, 2011.)

Proposición. Sean X e Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ un operador lineal. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones acerca de T:

(i) T es acotado (es decir, $\exists M > 0$ t.q. $\forall x \in X$, $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$);

(ii) T es continuo (esto es, $x_n, x_0 \in X$, $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$);

(iii) T es continuo en $x_0 = 0$.

• ¿Cómo establecemos la acotación (continuidad) de un operador si no disponemos de estimaciones apropiadas para su norma y si su continuidad tampoco es obvia?

Hay una herramienta abstracta que resulta muy útil en diversos contextos, entre ellos para los operadores que surgen en Análisis Complejo. Ésta involucra la gráfica del operador. Existen diferentes versiones, pensadas para operadores definidos sólo en un subespacio del espacio en cuestión pero aquí repasaremos sólo la versión más rudimentaria.

Teorema de la gráfica cerrada (básico). Sean X e Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ un operador lineal tal que su gráfica:

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

es un subespacio cerrado de $X \times Y$. Entonces T es un operador acotado.

Interpretación de la frase "$\Gamma(T)$ es un subespacio cerrado de $X\times Y$":

"$(x_n,Tx_n)\in\Gamma(T)$, $(x_n,Tx_n)\to(x,y)\in X\times Y \Rightarrow (x,y)\in\Gamma(T)$".

Dicho de otra manera:

"$x_n\in X,\ x_n\to x\in X,\ Tx_n\to y\in Y,\ n\to\infty \Rightarrow y=Tx.$"

- Veamos ahora una aplicación concreta de este resultado en el contexto de funciones holomorfas.

Ya sabemos que en el álgebra compleja $\mathcal{H}(\Omega)$ podemos definir una métrica compatible con la topología compacto-abierta y tal que $\mathcal{H}(\Omega)$ dotado de ella es un espacio completo. La pregunta natural que surge aquí es si se puede definir una norma compatible (que haga de $\mathcal{H}(\Omega)$ un espacio de Banach). La respuesta es negativa, como veremos a continuación.

Proposición (Urysohn, 1924). Sea Ω un dominio arbitrario en el plano. El espacio $\mathcal{H}(\Omega)$, provisto de la topología de convergencia uniforme sobre compactos, no se puede dotar de ninguna norma compatible con dicha topología.

Dem. $\square$ Si, por el contrario, existiese una norma $\|\cdot\|$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $d(f,g)=\|f-g\|$ (equivalentemente, $\|f_n-f\|\to 0,\ n\to\infty \Leftrightarrow f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f,\ \forall K\subset\Omega$), tendríamos las siguientes conclusiones.

El operador diferencial $D:\mathcal{H}(\Omega)\to\mathcal{H}(\Omega)$, $Df=f'$ es un operador lineal en $(\mathcal{H}(\Omega),\|\cdot\|)$ y con la gráfica cerrada:

$f_n\to f$ en $\|\cdot\|$, $Df_n=f_n'\to g$ en $\|\cdot\| \Rightarrow f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f,\ f_n' \underset{K}{\rightrightarrows} g,\ \forall K\subset\Omega \Rightarrow$ (Tma. de Weierstrass) $f_n' \underset{K}{\rightrightarrows} f',\ f_n' \underset{K}{\rightrightarrows} g,\ \forall K\subset\Omega$
$\Rightarrow$ (unicidad del límite) $g=f'=Df$.

Al ser, por hipótesis, $\mathcal{H}(\Omega)$ un espacio de Banach, se seguiría que el operador D es acotado en $\mathcal{H}(\Omega)$:

$$\exists M>0 \text{ t.q. } \forall f\in \mathcal{H}(\Omega),\ \|Df\|\leq M\|f\|.$$

Consideremos la función entera $f_0(z)=e^{(M+1)z}$. $f_0\in \mathcal{H}(\Omega)$, independientemente de Ω; $Df_0(z)=(M+1)f_0(z)$. Luego ($f_0\neq 0 \Rightarrow \|f_0\|>0$):

$$\|Df_0\|=(M+1)\|f_0\|>M\|f_0\|. \ \#$$

Por consiguiente, no existe ninguna norma en $\mathcal{H}(\Omega)$ con las propiedades deseadas. $\boxtimes$

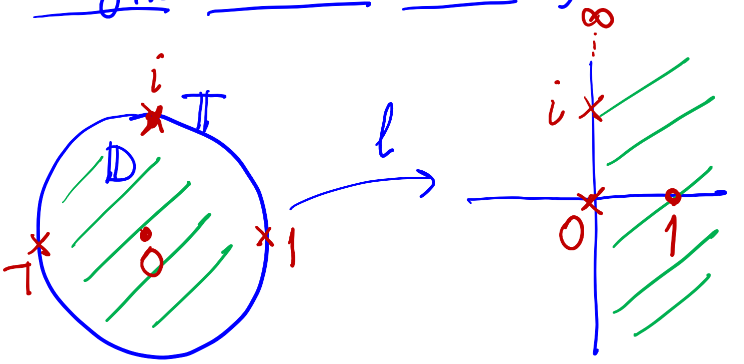
DE VUELTA A LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

Ya conocemos dos espacios básicos de funciones analíticas: $\underline{\mathcal{A}}$ y $\underline{H^\infty}$, siendo $\mathcal{A}\subseteq H^\infty\subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

- La segunda inclusión es claramente estricta. También lo es la primera, aunque los ejemplos vistos hasta ahora no lo demuestran. Lo comprobaremos en breve.
- Otro detalle que nos llama la atención es que toda función en $\mathcal{A}$ está definida en cada punto $z\in\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}=\{|z|=1\}$ y, además, es continua ahí. Cabe esperar que eso no ocurra para las funciones en H^∞. Uno de nuestros objetivos principales será precisamente definir varios espacios relacionados y ver en qué sentido sus funciones admiten "valores frontera" $f(e^{i\theta})$, $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$.

Ejemplo. Consideremos la función $S(z)=e^{-\frac{1+z}{1-z}}=e^{\frac{z+1}{z-1}}$, $z\in\mathbb{D}$. La función asociada: $\ell(z)=\frac{1+z}{1-z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ y tiene un polo simple en $z=1$ $\Rightarrow$ $S(z)=e^{-\ell(z)}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ $\Rightarrow S\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Veremos que, de hecho, $S\in H^\infty\setminus\mathcal{A}$ y $\|S\|_\infty=1$. (Puede verse que S tiene una singularidad esencial en $z=1$.)

La función ℓ suele llamarse la aplicación del semiplano (halfplane map, en inglés), mientras que S lleva el nombre de <u>función singular interna atómica</u>, lo cual se explicará más tarde.



ℓ es una transformación de Möbius y $\ell(1)=\infty$, $\ell(i)=i$, $\ell(-1)=0$, luego transforma la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ $(1, i, -1 \in \mathbb{T})$ en una recta (ya que $\ell(\mathbb{T}) \ni \infty$), que es precisamente el eje imaginario. Por continuidad de ℓ y conexión de $\mathbb{D}$, $\ell(\mathbb{D})$ es conexo y no corta el eje imaginario (al ser ℓ inyectiva). Por tanto, $\ell(\mathbb{D})$ es uno de los semiplanos delimitados dicho eje, $\{w : \operatorname{Re} w = 0\}$.

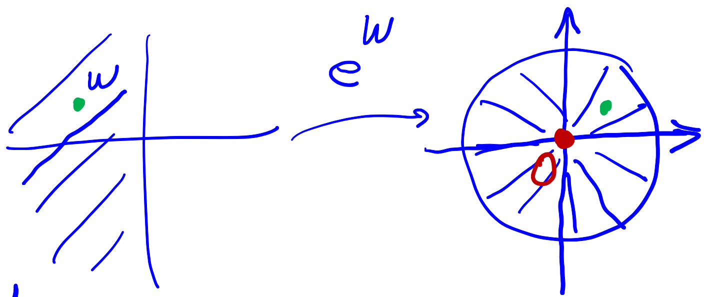
$$\ell(0) = 1 \Rightarrow \ell(\mathbb{D}) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}.$$

Se sigue de este análisis que $-\ell(z) = \frac{z+1}{z-1}$ lleva $\mathbb{D}$ sobre el semiplano izquierdo $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$. Puesto que

$|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$, se sigue que $\forall z \in \mathbb{D}$

$$|S(z)| = |e^{-\ell(z)}| < 1 \Rightarrow S(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}.$$

(Nótese que, sin embargo, $S(\mathbb{D}) \neq \mathbb{D}$ pues $S(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$. De hecho, puede verse que $S(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y que, $\forall w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ $|\{z \in \mathbb{D} : S(z) = w\}|$ es numerable.)



(Ejercicio)

Por tanto, $\|S\|_\infty \leq 1$.

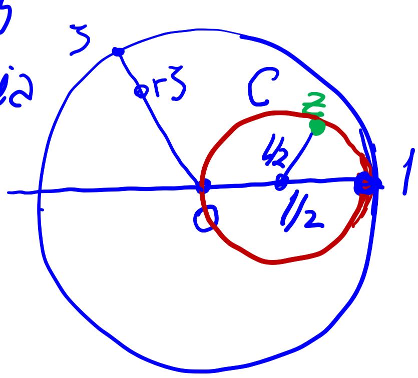
Cuando $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, $\ell(z) = iy$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow |S(z)| = |e^{-iy}| = 1$.

Luego $\|S\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |S(z)| = 1$.

Obviamente, $S(1)$ no existe, debido a la singularidad esencial.

• Puede verse que, tomando $z=r\in\mathbb{R}$, $r\in[0,1)$, $\ell(r)\longrightarrow+\infty$
$\Longrightarrow S(r)=e^{-\ell(r)}\longrightarrow 0$, $r\to 1^-$. Por tanto, $S\notin C(\overline{\mathbb{D}})\Rightarrow S\notin A$.

• Ejercicio. Consideremos el horociclo $C=\{z:|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\}$ $=\{z: z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{it},\ t\in[0,2\pi]\}$, la circunferencia centrada en $\frac{1}{2}$ y de radio $\frac{1}{2}$, tangencial a $\mathbb{T}$ por dentro.



Se pide describir el conjunto $S(C)$ y razonar la existencia del límite $\lim\limits_{z\in C,\, z\to 1} S(z)$.

Definición. Sea $f\in H(\mathbb{D})$ y $\zeta=e^{i\theta}\in\mathbb{T}$. Diremos que f tiene límite radial L $(\in\mathbb{C})$ si
$$\lim_{r\to 1^-} f(r\zeta)=\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})=L.$$

• Una pregunta importante que nos ocupará es si determinados funciones tienen límites radiales y qué propiedades tienen estos.

Acabamos de ver que $\forall\zeta\in\mathbb{T}$ existe el límite radial
$$\lim_{r\to 1^-} S(r\zeta)=\begin{cases} e^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} & (\text{número de módulo } 1),\ \zeta\neq 1\\ 0, & \zeta=1.\end{cases}$$

En general, el límite radial no tiene por qué existir en ningún punto de $\mathbb{T}$.

Uno de nuestros próximos objetivos será ver el siguiente (importante) resultado.

Teorema (Fatou, 1906). Sea $f\in H^\infty$. Entonces el límite radial: $\tilde{f}(\zeta)=\lim\limits_{r\to 1^-} f(r\zeta)$ existe en casi todo punto $\zeta\in\mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,2\pi]$, representando $\mathbb{T}$ como $\{\zeta=e^{it}: t\in[0,2\pi]\}$.

La propiedad establecida en este teorema es compartida por muchas más funciones, p.ej.:

—por las funciones armónicas y acotadas en $\mathbb{D}$;

—por las funciones analíticas en otros espacios del disco cuyo crecimiento esté controlado de alguna manera, llamados espacios de Hardy, H^p, $0<p<\infty$, siendo $H^\infty \subsetneq H^p$, $\forall p\in(0,\infty)$), así como por las funciones en la clase de Nevanlinna, más amplia que todos los espacios de Hardy.

La existencia de los límites radiales se basa en algunas propiedades profundas de ciertas integrales de Poisson y requiere bastante trabajo técnico (para cualquiera de las demostraciones posibles).

• Veremos también que en los espacios de Hardy será posible describir —de manera muy precisa— los ceros de sus funciones.

Además, también es posible describir los conjuntos de interpolación, de nuevo en términos de la métrica pseudo-hiperbólica.

• Veremos otros espacios relacionados con la integración, llamados espacios de Bergman, donde también será posible describir los conjuntos de interpolación pero los conjuntos de ceros serán más complicados.

Además, veremos que esos espacios contienen funciones con un comportamiento mucho peor como, por ejemplo, la serie lagunar

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Puede comprobarse que $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ pero $\lim_{r\to1^-} f(r\zeta)$ no existe en casi ningún punto $\zeta\in\mathbb{T}$.

Esta función no puede pertenecer a ningún espacio de Hardy y, sin embargo, estará en todos los espacios de Bergman.

Las funciones en todos los espacios de Hardy tienen una estructura similar pero uno de ellos ocupa un lugar destacado porque admite varias descripciones y, además, es un espacio de Hilbert.

El espacio de Hardy H^2

Def'n. El espacio de Hardy H^2 es el conjunto de todas las funciones f escritas como series de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$. (a priori, no indicamos en qué disco convergen)

Observaciones. • En primer lugar, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$ $\Rightarrow \exists M>0$ tq. $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $|a_n|\le M$. Por tanto, si $K\Subset\mathbb{D}$, $\exists r\in(0,1)$ t.q. $\forall z\in K$, $|z|\le r \Rightarrow |a_n z^n|\le Mr^n$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge, luego (por el Criterio de comparación de Weierstrass) la serie de Taylor de f converge uniformemente en K. Por el Teorema de Weierstrass, $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

(Obsérvese que el mismo razonamiento funciona para toda serie de potencias con los coeficientes acotados.)

• Ahora es evidente que H^2 es un espacio vectorial pues $|a_n+b_n|^2=|a_n|^2+|b_n|^2+2\operatorname{Re}\{a_n\bar{b}_n\}\le |a_n|^2+|b_n|^2+2|a_nb_n|\le 2(|a_n|^2+|b_n|^2)$.

De hecho, podemos definir en H^2 la norma natural:

$$\|f\|_{H^2}^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$$

y el producto escalar asociado: $f(z)=\sum_n a_n z^n$, $g(z)=\sum_n b_n z^n$,

$$\langle f,g\rangle_{H^2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{b}_n. \qquad (\langle f,f\rangle=\|f\|^2)$$

Puesto que la correspondencia $f\longmapsto (a_n)_{n=0}^{\infty}$, siendo $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, es lineal y biyectiva, es evidente que el espacio H^2 es isométricamente isomorfo al espacio ℓ^2 de sucesiones complejas de cuadrado sumable, siendo

$$\|f\|_{H^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}=\|(a_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\ell^2}.$$

Por tanto, también es evidente que el espacio H^2 es completo (Hilbert) ya que ℓ^2 lo es.

- La colección $\{e_n : n\geq 0\}$, con $e_n=(0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$

coordenadas: $0\ 1\ \ n-1\ \ n\ \ n+1$

es una base ortonormal en ℓ^2:

$$\forall a=(a_n)_{n=0}^{\infty}\in\ell^2,\quad a=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e_n,$$

siendo la serie convergente en la norma de ℓ^2 y $a_k=\langle a,e_k\rangle$, $\forall k\geq 0$. Por tanto, $\{f_n : n\geq 0\}$, con $f_n(z)=z^n$, es una B.O.N. para H^2 y $\forall f\in H^2$: $\quad f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n f_n$; $\quad a_k=\langle f,f_k\rangle$, $k\geq 0$.

- En breve interpretaremos esto como una convergencia puntual: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $z\in\mathbb{D}$, en cuando establezcamos que:

$$g_n\xrightarrow{H^2}g \Rightarrow g_n\underset{K}{\rightrightarrows}g,\ \forall K\Subset\mathbb{D}.$$

Ejemplos.

- Los polinomios pertenecen a H^2 (si $\operatorname{gr}P=n$, $\forall k>n,\ a_k=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2=\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2<\infty$).

- Sea $f_\alpha(z)=(1-z)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. (Puede definirse como función holomorfa en $\mathbb{D}$ p.q. $1-z\neq 0$ en $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}$ es simplemente conexo.)

Entonces $f_\alpha\in H^2 \Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2}$.

(Ejercicio: El cálculo involucra la fórmula del binomio generalizada y la fórmula de Stirling:

$$\boxed{\Gamma(x)\sim x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi},\quad x\to\infty,}$$

para controlar asintóticamente los coeficientes.)