⑦ M, 02/03/2021

Comentarios adicionales acerca de los productos de Blaschke finitos

- Definimos el grado de una función racional $f=\frac{P}{Q}$ (con P, Q polinomios sin factores comunes no constantes) como

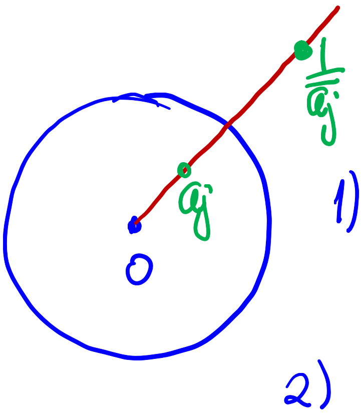
$$gr\, f = \text{máx}\{gr\, P, gr\, Q\}.$$

Es claro que todo producto de Blaschke de grado n:

$$B(z)=\lambda \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j}(z) = \frac{\lambda \prod_{j=1}^{n}(a_j-z)}{\prod_{j=1}^{n}(1-\overline{a_j}z)}, \quad |\lambda|=1,\ |a_j|<1,$$

es una función racional de grado n. B tiene exactamente n ceros (contando multiplicidades), todos ellos en $\mathbb{D}$. Si $\forall j\in\{1,\dots,n\}$, $a_j\neq 0$, tiene exactamente n polos (contando multiplicidades): $\frac{1}{\overline{a_j}}=\frac{a_j}{|a_j|^2}$, todos ellos en $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}=\{z: |z|>1\}$. Si k de los a_j son $=0$, tiene $n-k$ polos en $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$. El producto de Blaschke cz^n de grado n (con $a_1=\dots=a_n=0$, $\lambda=(-1)^n c$) no tiene polos en $\mathbb{C}$: es una función entera. (Podemos interpretar cada producto de Blaschke de grado n como una función con n polos en la esfera de Riemann: $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.)

- Cada cero a_j y su polo correspondiente son puntos simétricos respecto a la circunferencia unidad $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$. Esto es, cada uno se obtiene del otro mediante la inversión respecto a la circunferencia $\mathbb{T}$. En efecto, escribiendo $a_j=re^{it}$, vemos que



1) $\arg\frac{1}{\overline{a_j}}=\arg a_j$: $\frac{1}{\overline{a_j}}=\frac{1}{r}e^{it}$;

2) $|a_j|\cdot\left|\frac{1}{\overline{a_j}}\right|=\frac{|a_j|}{|a_j|}=1=$ el radio de $\mathbb{T}$ al cuadrado.

• La caracterización de los productos finitos de Blaschke que vimos antes (en los apuntes de la clase 5) puede generalizarse como sigue, debilitando las hipótesis (véase Hoja 1-A de problemas):

Proposición (Fatou, 1923). Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1$ (es decir, para toda sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{D}$, $|z_n| \to 1^- \Rightarrow |f(z_n)| \to 1$), entonces f es un producto de Blaschke finito. (Ejercicio)

La prueba es muy similar a la que vimos en clase, aplicando el Principio del módulo máximo pero sin considerar los valores de f en $\mathbb{T}$ (cuya existencia a priori se desconoce). Es fácil deducir que f sólo tiene una cantidad finita de ceros en $\mathbb{D}$ (por el Principio de la unicidad / ceros aislados) y ese número de ceros será su grado.

REPASO: Topología compacta-abierta

• Notación. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio. Si $K \subseteq \Omega$ es compacto, escribiremos $K \Subset \Omega$.

(P.ej., $\overline{D}(0;r) = \{z : |z| \le r\} \Subset \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ cuando $0 < r < 1$.)

Si $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, decimos que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f uniformemente en los compactos de Ω si

$$\forall K \Subset \Omega,\ f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f;\ \text{esto es, si}$$

$$\forall K \Subset \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N\ \forall z \in K\ \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

o, equivalentemente,

$$\forall K \Subset \Omega \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0.$$

Obviamente,

$$f_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} f \Rightarrow \forall K \Subset \Omega, f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f \Rightarrow \forall z \in \Omega, f_n(z) \to f(z) \quad (n \to \infty)$$

$(\{z\} \Subset \Omega)$

y es fácil ver que los recíprocos son falsos.

La topología de convergencia uniforme se denomina compacto-abierta (en inglés: compact-open topology) y es muy apropiada para el estudio de funciones holomorfas en Ω (al igual que para un compacto K la convergencia uniforme en K encaja bien con la continuidad). La razón principal para ello reside en el siguiente resultado clásico:

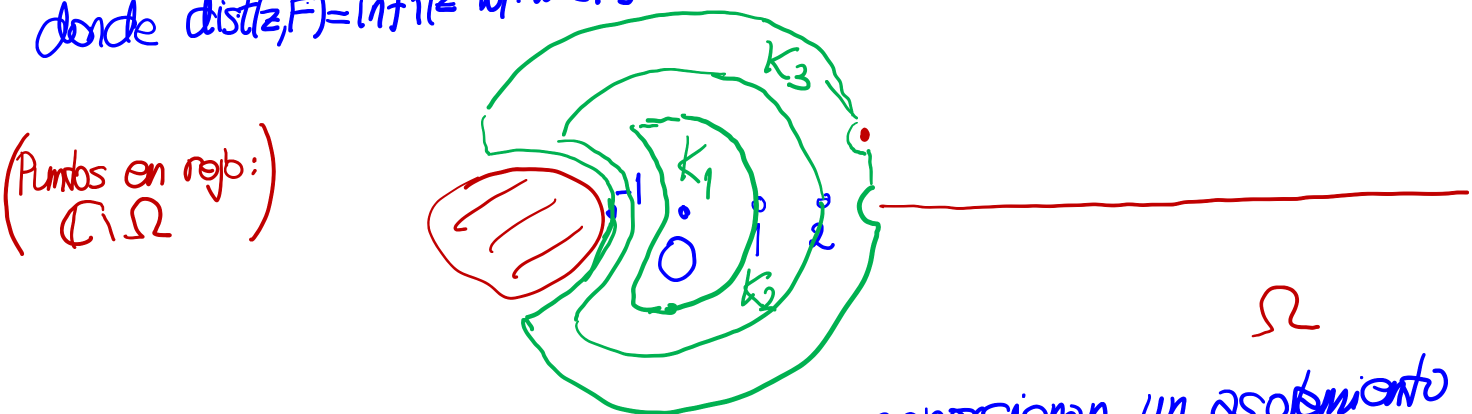
Teorema (Weierstrass). Si Ω es un dominio, $f_n \in H(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\forall K \Subset \Omega$, $f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f$, entonces:

(1) $f \in H(\Omega)$; (2) $f_n' \overset{K}{\rightrightarrows} f'$, $\forall K \Subset \Omega$.

• Puede verse que la topología compacta-abierta en Ω proviene de una métrica, que se puede definir como sigue.
Primero definimos los conjuntos

$$K_n = \{z \in \Omega : |z| \le n\} \cap \{z \in \Omega : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) \ge \tfrac{1}{n}\},$$

donde $\mathrm{dist}(z,F) = \inf\{|z-w| : w \in F\}$. ($F$ cerrado)



Entonces los conjuntos $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ nos proporcionan un agotamiento de Ω por compactos:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

(En particular, $K \Subset \Omega \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $K \subseteq K_n$. Tienen otras propiedades que en este contexto nos interesan menos.)

Puesto que $d_n(f,g) = \max_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|$ define una distancia entre las funciones continuas en K_n, es fácil ver que $\dfrac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}$ también define una distancia acotada por 1 entre las funciones del mismo tipo. Puesto que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, se sigue que

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max_{z\in K_n} |f(z)-g(z)|}{1+\max_{z\in K_n} |f(z)-g(z)|}$$

define una métrica (también acotada por 1), tanto en el espacio $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ continua en } \Omega\}$ como en $\mathcal{H}(\Omega)$.

- Además, es sencillo comprobar que $\forall K \subset \Omega$, $f_j \overset{K}{\rightrightarrows} f$, $j \to \infty$
$\Leftrightarrow d(f_j, f) \to 0$, $j \to \infty$, ya que $\forall K \subset \Omega\ \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $K \subseteq K_n$.

Gracias a las propiedades de los límites uniformes de funciones continuas, puede demostrarse que $(C(\Omega), d)$ es un espacio métrico completo.

Gracias al Teorema de Weierstrass, $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ y, por tanto, $\mathcal{H}(\Omega)$ dotado de la topología compacto-abierta es un subespacio cerrado de $(C(\Omega), d)$. Por consiguiente, también es un espacio métrico completo.

- Referencias para este repaso:
  - J. B. Conway: Functions of One Complex Variable, I, 2ª ed., Springer, 1978. (Capítulos II y VII)
  - L. V. Ahlfors: Complex Analysis, 3ª ed., McGraw-Hill, 1979. (Capítulos 2 y 5).
- Para los productos de Blaschke finitos:
  - S. R. Garcia, J. Mashreghi, W. T. Ross: Finite Blaschke Products and Their Connections, Springer 2018.

Funciones analíticas acotadas

Def'n. $H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f \text{ está acotada en } \mathbb{D}\}$
$= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \exists M>0 \ \forall z \in \mathbb{D} \ |f(z)| < M\}$.

Ejemplos. • Los polinomios y los productos de Blaschke finitos pertenecen a H^∞.

• $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ pero $f \notin H^\infty$ ya que
$f(1-\frac{1}{n}) = n \to \infty$, $n \to \infty$.

Propiedades. • H^∞ es (obviamente) un espacio vectorial.

• $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$ define una norma en H^∞. (Demostración: ejercicio fácil.)

• $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach (es completo).

Dem. $\square$ Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en H^∞. Dado $\varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m>n\geq N$ $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$, así que

Consideremos un $K \Subset \mathbb{D}$ arbitrario.

$(*)$ $\forall z \in \mathbb{D}$ $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ (y, en particular, $\forall z \in K$).

Por el Criterio de Cauchy (para la convergencia uniforme), una sucesión uniforme de Cauchy es uniformemente convergente en K. Por lo tanto, $\forall z \in K$ $\exists f(z) \in \mathbb{C}$ t.q. $f_n(z) \underset{K}{\rightrightarrows} f(z)$. Este procedimiento define una función $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ que es única y, puesto que $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$ $\forall K \Subset \mathbb{D}$, el Teorema de Weierstrass nos dice que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Manteniendo ε y n fijos y tomando el límite cuando $m\to\infty$ en $(*)$, obtenemos: $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq N$.

Esto demuestra que $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\|f - f_n\|_\infty \to 0, n\to\infty$. $\boxtimes$

Terminología. La *bola unidad* del espacio de Banach H^∞:

$$B(H^\infty)=\{f\in H^\infty:\ \|f\|_\infty\le 1\}$$
$$=\{f\in \mathcal{H}(\mathbb{D}):\ \forall z\in\mathbb{D},\ |f(z)|\le 1\}$$

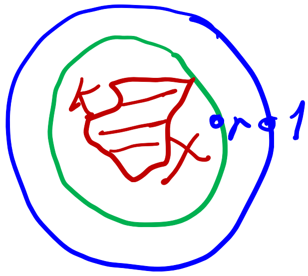
es precisamente la clase de funciones para la que consideramos el problema de interpolación de Pick–Nevanlinna. Uno de los resultados clásicos de Schur describe los coeficientes de Taylor de las funciones en esta clase, por lo que con frecuencia $B(H^\infty)$ se denomina la *clase de Schur* y se denota por $\mathcal{S}$.

(J. B. Garnett: Bounded Analytic Functions, 1ª ed. revisada, Springer 2007; notación: $\mathcal{B}$.)

Observación. En la prueba del Teorema de Carathéodory, para una $f\in B(H^\infty)$ y $\forall n\in\mathbb{N}$ construimos un producto finito de Blaschke, B_n, t.q. $f(z)-B_n(z)=z^n h_n(z)$, $\forall z\in\mathbb{D}$.

Ya observamos que $|z^n h_n(z)|\le |f(z)|+|B_n(z)|\le 2$, $\forall z\in\mathbb{D}$ y que, por un lema básico visto antes, $|h_n(z)|\le 2$, $\forall z\in\mathbb{D}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Para cualquier $K\Subset\mathbb{D}$, $\exists r\in(0,1)$ t.q. $\forall z\in K$, $|z|\le r$, luego $\forall z\in K$ obtenemos que, de hecho,



$$|f(z)-B_n(z)|=|z^n h_n(z)|\le 2r^n\to 0,\ n\to\infty,$$

así que $\sup_K |f-B_n|\to 0$, $n\to\infty$. Por tanto, este examen más detallado de la prueba nos dice que, de hecho:

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall f\in B(H^\infty)\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists B_n,\ \text{producto de Blaschke finito, t.q.}\\ B_n \underset{K}{\rightrightarrows} f,\ \forall K\Subset\Omega.\end{array}}$$

Esta forma más fuerte del Teorema de Carathéodory ya visto antes nos será de utilidad para probar otros resultados.

Definición. Un álgebra compleja es un espacio vectorial A sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{C}$ en el que está definida la multiplicación ($x, y \in A \Rightarrow xy \in A$) y ésta satisface las leyes asociativas y distributivas:

$$\forall x, y, z \in A: \quad x(yz) = (xy)z, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz.$$

Además, $\forall x, y \in A$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ se debe cumplir

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y.$$

Ejemplos. $C(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$.

Definición. Si un álgebra compleja A es, además, un espacio normado en el que la norma satisface la desigualdad multiplicativa:

$$\forall x, y \in A, \quad \|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|,$$

diremos que A es un álgebra compleja normada. Si el espacio normado $(A, \|\cdot\|)$ es completo, A se denomina álgebra de Banach.

Observaciones. • La multiplicación es una operación continua en un álgebra de Banach, puesto que

$$\|x_n y_n - xy\| = \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|,$$

así que $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow x_n y_n \to xy$ en A.

• En general, no se pide que $\forall x, y \in A$, $xy = yx$. Si esta condición se cumple, el álgebra de Banach A es conmutativa.

• Con frecuencia sí se supone que A es unitaria, es decir, que existe un elemento e (llamado unidad) t.q.

$$\forall x \in A, \quad ex = xe = x.$$

Tal elemento es único: si hay dos, e y e', entonces $e' = ee' = e$.

Obviamente $\|e\| = \|e \cdot e\| \le \|e\|^2 \Rightarrow \|e\| \ge 1$. Con frecuencia se asume que $\|e\| = 1$.

Las álgebras de Banach son muy importantes en la teoría de operadores, que es una parte fundamental del análisis funcional. En la literatura antigua, sobre todo en la rusa (y en sus traducciones), siendo I.M. Gelfand uno de sus fundadores, se solían denominar "anillos normados".

Teoría básica: W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3ª ed., McGraw-Hill, 1987 (Capítulo 18).

Teoría más avanzada: W. Rudin, *Functional Analysis*, 2ª ed., Mc Graw-Hill, 1991 (Capítulos 10 y 11).

Ejemplos. • H^∞ es un álgebra de Banach conmutativa: es fácil ver que $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, donde $(fg)(z) = f(z)\cdot g(z)$.

La unidad es la función $\mathbb{1}(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$; $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$.

• Sea X un espacio de Banach complejo y $\mathcal{B}(X)$ el conjunto de todos los operadores lineales acotados en X, esto es, de todas las transformaciones $T: X \to X$ tales que

$$T(x+y) = Tx + Ty\,, \quad T(\lambda x) = \lambda Tx \quad \forall x,y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

y $\|T\| < +\infty$, donde

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup\{\|Ty\| : y \in X, \|y\| = 1\}$$

$$= \inf\{M > 0 : \forall x \in X, \|Tx\| \le M\|x\|\}.$$

Puesto que el producto (la composición) de dos operadores $S, T \in \mathcal{B}(X)$ también está en $\mathcal{B}(X)$ y $\|ST\| \le \|S\|\cdot\|T\|$, puede comprobarse que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach. En general, es no conmutativa y la unidad es el operador I, dado por $I(x) = x$, $\forall x \in X$, con $\|I\| = 1$.

• **Álgebra del disco:** $\mathcal{A} = H^\infty \cap C(\overline{\mathbb{D}})$.

Es un subespacio de H^∞, dotado de la misma norma que, en este caso, se convierte en

$$\|f\|_\infty = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)| = \max_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|,$$

por el Principio del módulo máximo.

Es un subespacio cerrado de H^∞ ya que, si $f_n \in \mathcal{A}$ y $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, entonces se sigue que

$$\max_{z\in\mathbb{T}} |f_n(z) - f(z)| \to 0, \quad n\to\infty$$

y, por el Principio del módulo máximo, $f_n \underset{\overline{\mathbb{D}}}{\rightrightarrows} f$. Al ser $f_n \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y $\overline{\mathbb{D}}$ compacto, deducimos que $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, luego $f \in \mathcal{A}$.

En $\mathcal{A}$ se sigue cumpliendo que $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, así que es un álgebra de Banach (conmutativa y con la misma unidad que H^∞).

Ejemplos de funciones en $\mathcal{A}$.

• Polinomios

• Dilataciones de una $f \in H(\mathbb{D})$: $f_r(z) = f(rz)$ $(0<r<1)$; $f_r \in H(\frac{1}{r}\mathbb{D})$; $\frac{1}{r}\mathbb{D} = \{z : |z| < \frac{1}{r}\}$.

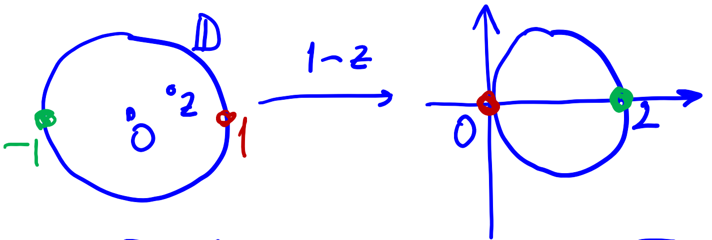
• $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$; radio de convergencia: $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = 1$

$\Rightarrow f \in H(\mathbb{D})$;

$|z| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Por el Criterio de Weierstrass (M-test), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \le 1\}$. Las sumas parciales son continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ (polinomios), luego su límite uniforme, f, es una función en $C(\overline{\mathbb{D}})$. Por tanto, $f \in \mathcal{A}$.

- $f(z)=\sqrt{1-z}$, siendo $\sqrt{1}=1$.

La función $g(z)=1-z\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $g(z)\neq 0$ en $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}$ es un dominio simplemente conexo $\Rightarrow f=\sqrt{g}\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, eligiendo una determinación de la raíz (p.ej., con $\sqrt{1}=1$).



Es evidente que podemos definir $\sqrt{1-z}$ como función continua en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$, $\sqrt{1-1}=0$ y sólo hace falta comprobar que

$\lim\limits_{z\to 1}\sqrt{1-z}=0$, cuando $z\in\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$. (Ejercicio)

- Los productos finitos de Blaschke pertenecen a $\mathcal{A}$.
  De hecho, cada $B\in B(\mathcal{A})$ pues $\|B\|_\infty=\max\limits_{|z|\leq 1}|B(z)|=1$.

- Más generalmente, toda combinación convexa de productos finitos de Blaschke está en $B(\mathcal{A})$: si $B_1,\dots,B_n$ son productos finitos de Blaschke (de cualquier grado, constantes o no) y $t_1,\dots,t_n\geq 0$ con $t_1+\dots+t_n=1$, entonces

$$\|t_1B_1+\dots+t_nB_n\|_\infty\leq t_1\|B_1\|_\infty+\dots+t_n\|B_n\|_\infty=t_1+\dots+t_n=1.$$

Resulta que la envoltura convexa de los productos finitos de Blaschke (el conjunto de todas esas combinaciones convexas) es densa en $B(\mathcal{A})$, es decir:

Teorema (S.D. Fisher, 1968). $\forall f\in B(\mathcal{A})$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists f_n$, una combinación convexa de productos finitos de Blaschke, t.q. $f_n\underset{\overline{\mathbb{D}}}{\rightrightarrows} f$ (es decir, $f_n\to f$ en la norma de $\mathcal{A}$).

- La demostración se basa en el Teorema de Carathéodory (en la versión más precisa vista hoy).