⑥ J, 25/02/2021

• Recordemos que el Teorema de Pick (y Nevanlinna) afirma que, dados $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{D}$ con $z_j\neq z_j$ para $i\neq j$ y $w_1,\dots,w_n\in\overline{\mathbb{D}}$, existe $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y tq. $f(\mathbb{D})\subseteq\overline{\mathbb{D}}$ y $f(z_j)=w_j$, $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$ $\Leftrightarrow$ la forma cuadrática

$$Q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}x_j\overline{x_k}\,,\quad x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C},$$

es semidefinida positiva.

• Obsérvese que Q_n es una forma hermitiana (hermítica) ya que $a_{jk}=\dfrac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}$ tiene la propiedad $\overline{a_{jk}}=a_{kj}$ y, por tanto, Q_n sólo toma valores reales pues $a_{jk}x_j\overline{x_k}+a_{kj}\cdot x_k\overline{x_j}=a_{jk}x_j\overline{x_k}+\overline{a_{jk}x_j\overline{x_k}}$
$=2\operatorname{Re}\{a_{jk}x_j\overline{x_k}\}$, $\forall j,k\in\{1,2,\dots,n\}$, $j\neq k$; $a_{kk}x_k\overline{x_k}=a_{kk}|x_k|^2\in\mathbb{R}$.

Dem. del teorema. □ (D.E. Marshall, 1976)

• Caso $n=1$. Ya lo tenemos resuelto porque $Q_1(x_1)=\dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}|x_1|^2$ es semidefinida positiva $\Leftrightarrow 1-|w_1|^2\geq 0\Leftrightarrow|w_1|\leq 1$. La interpolación es posible para todos esos valores porque, si $|w_1|=1$, podemos elegir $f\equiv w_1$ y, si $|w_1|<1$, sabemos que $\exists f\in\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ t.q. $f(z_1)=w_1$. (En ambos casos, f es un producto de Blaschke de grado ≤ 1.)

• Sea $n>1$. La clave de la prueba consiste en fijarse en un dato -sin perdida de generalidad, en w_n (las condiciones se pueden permutar). Si $\exists f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $f(\mathbb{D})\subseteq\overline{\mathbb{D}}$ y $f(z_j)=w_j$, $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$, entonces $|w_n|\leq 1$. Si $|w_n|=1$, entonces $f\equiv$ cte (usando el típico razonamiento con el módulo máximo o la aplicación abierta), así que $f\equiv w_n$, luego $w_1=w_2=\dots=w_n$ y, por tanto,

$$a_{jk}=\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}=\frac{1-|w_n|^2}{1-z_j\overline{z_k}}=0\,,$$

luego Q_n es semidefinida positiva (notación: $Q_n \geq 0$).

- Recíprocamente, si $Q_n \geq 0$, sustituyendo en la forma los valores $x_j = \begin{cases} 0, & 1 \leq j < n \\ 1, & j = n \end{cases}$, obtenemos

$$Q_n(0,0,\dots,0,1) = \frac{1-|w_n|^2}{1-|z_n|^2} \geq 0 \Rightarrow |w_n| \leq 1.$$

Si $|w_n| = 1$, eligiendo $x_j = 0$, $\forall j \neq k, n$, vemos que

$$Q_n(0,\dots,0,x_k,0,\dots,0,x_n) = \frac{1-|w_k|^2}{1-|z_k|^2}|x_k|^2 + 2\operatorname{Re}\left\{\frac{1-w_k\overline{w_n}}{1-z_k\overline{z_n}}x_k\overline{x_n}\right\} + \frac{1-|w_n|^2}{1-|z_n|^2}|x_n|^2$$

$= Q_2(x_k,x_n)$, correspondiente a la matriz (2×2):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-|w_k|^2}{1-|z_k|^2} & \dfrac{1-w_k\overline{w_n}}{1-z_k\overline{z_n}} \\ \dfrac{1-w_n\overline{w_k}}{1-z_n\overline{z_k}} & \dfrac{1-|w_n|^2}{1-|z_n|^2} \end{bmatrix},$$ que también tiene que ser semidefinida positiva.

De la discusión del caso $n=2$ (véanse los apuntes del día anterior), ya sabemos que eso es equivalente a

$$\left|\frac{w_k-w_n}{1-w_k\overline{w_n}}\right| \leq \left|\frac{z_k-z_n}{1-z_k\overline{z_n}}\right|.$$

Puesto que $|w_n|=1$, por las propiedades de los automorfismos φ_a, si $|w_k|<1$ tendremos $1 = \left|\dfrac{w_k-w_n}{1-w_k\overline{w_n}}\right| \leq \left|\dfrac{z_k-z_n}{1-z_k\overline{z_n}}\right| < 1$

$(z_k, z_n \in \mathbb{D})$, $\#$. Por tanto, $|w_k|=1$ y es fácil ver que $w_k = w_n$ (de lo contrario, $1-w_k\overline{w_n} \neq 0$, $w_k - w_n \neq 0$ y también $|w_k-w_n| = |1-w_k\overline{w_n}|$). Puesto que esto se cumple para todo k, se sigue que $w_1 = \dots = w_n$ y podemos tomar, de nuevo, $f \equiv w_n$.

En resumen, $|w_n| \leq 1$ y el caso $|w_n|=1$ es trivial.

- Por tanto, sólo tenemos que considerar el caso $|w_n|<1$. La idea consiste en reducirlo al caso $z_n = w_n = 0$.

Sean $z_j' = \varphi_{z_n}(z_j) = \dfrac{z_n - z_j}{1-\overline{z_n} z_j}$, $w_j' = \varphi_{w_n}(w_j) = \dfrac{w_n - w_j}{1-\overline{w_n}w_j}$, $1\le j\le n$,

de manera que $z_n' = 0 = w_n'$.

Sea $g = \varphi_{w_n}\circ f\circ \varphi_{z_n}$: $g(z) = \dfrac{w_n - f\left(\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}\right)}{1-\overline{w_n} f\left(\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}\right)}$, $z\in\mathbb{D}$.

Puesto que $|z_n|, |w_n| < 1$,

si $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, entonces $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

y si $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, entonces $f = \varphi_{w_n}\circ g\circ\varphi_{z_n}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$.

Además, $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$ $f(z_j) = w_j \iff f(\varphi_{z_n}(z_j')) = w_j$

$$\iff \varphi_{w_n}(f(\varphi_{z_n}(z_j'))) = w_j'$$

$$\iff g(z_j') = w_j'.$$

Además, por el Lema del otro día,

f es un producto de Blaschke de grado $\le n$

$\iff g$ es un producto de Blaschke de grado $\le n$.

• Por tanto, hemos transferido el problema para los puntos $\{z_1,\dots,z_{n-1},z_n\}$ y $\{w_1,\dots,w_{n-1},w_n\}$ al mismo problema para los puntos $\{z_1',\dots,z_{n-1}',0\}$ y $\{w_1',\dots,w_{n-1}',0\}$. Sea Q_n' la forma cuadrática correspondiente a este problema reducido y veamos cómo se relaciona con la forma Q_n.

$$\frac{1-z_j'\overline{z_k'}}{1-z_j\overline{z_k}} = \frac{1-\frac{z_n-z_j}{1-\overline{z_n}z_j}\cdot\frac{\overline{z_n}-\overline{z_k}}{1-z_n\overline{z_k}}}{1-z_j\overline{z_k}} = \frac{(1-\overline{z_n}z_j)(1-z_n\overline{z_k}) - (z_n-z_j)(\overline{z_n}-\overline{z_k})}{(1-z_j\overline{z_k})(1-\overline{z_n}z_j)(1-z_n\overline{z_k})}$$

$$= \frac{1-\cancel{\overline{z_n}z_j} - \cancel{z_n\overline{z_k}} + |z_n|^2 z_j\overline{z_k} - |z_n|^2 + \cancel{z_j\overline{z_n}} + \cancel{\overline{z_k}z_n} - z_j\overline{z_k}}{(1-z_j\overline{z_k})(1-\overline{z_n}z_j)(1-z_n\overline{z_k})}$$

$$= \frac{(1-|z_n|^2)\cancel{(1-z_j\overline{z_k})}}{\cancel{(1-z_j\overline{z_k})}(1-\overline{z_n}z_j)(1-z_n\overline{z_k})}$$

$$= \frac{1-|z_n|^2}{(1-\overline{z_n}z_j)(1-z_n\overline{z_k})} = \alpha_j\overline{\alpha_k}, \qquad (1)$$

donde $\alpha_j = \dfrac{\sqrt{1-|z_n|^2}}{1-\overline{z_n}z_j}$, $\alpha_k = \dfrac{\sqrt{1-|z_n|^2}}{1-\overline{z_n}z_k}$.

Análogamente,

$$\frac{1-w_j'\overline{w_k'}}{1-w_j\overline{w_k}} = \frac{1-|w_n|^2}{(1-\overline{w_n}w_j)(1-w_n\overline{w_k})} = \beta_j\overline{\beta_k}, \qquad (2)$$

donde $\beta_j = \dfrac{\sqrt{1-|w_n|^2}}{1-\overline{w_n}w_j}$, $\beta_k = \dfrac{\sqrt{1-|w_n|^2}}{1-\overline{w_n}w_k}$.

De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{1-w_j'\overline{w_k'}}{1-z_j'\overline{z_k'}}x_j\overline{x_k} = \frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}\left(\frac{\beta_j}{\alpha_j}x_j\right)\overline{\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}x_k\right)},$$

así que $Q_n'(x_1,\dots,x_n) = Q_n\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}x_1,\dots,\frac{\beta_n}{\alpha_n}x_n\right)$.

Por lo tanto, $Q_n' \geq 0 \iff Q_n \geq 0$.

El problema queda reducido al caso $z_n = w_n = 0$, el cual se puede reescribir como

$$f\in H(\mathbb{D}),\ f(\mathbb{D})\subseteq \mathbb{D},\ f(0)=0,\ f(z_j)=w_j,\ \forall j\in\{1,2,\dots,n-1\}. \quad (*)$$

Una $f\in H(\mathbb{D})$ con $f(0)=0$ puede escribirse como $f(z)=zg(z)$, para otra $g\in H(\mathbb{D})$. Por el Lema del otro día,

$$|f(z)| = |zg(z)|\leq 1,\ \forall z\in\mathbb{D} \Rightarrow |g(z)|\leq 1,\ \forall z\in\mathbb{D}$$

y el recíproco es trivialmente cierto.

Por tanto,

$\circledast \iff \exists g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, siendo $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ $(z \neq 0;\ g(0) = f'(0))$
t.q. $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $g(z_j) = \frac{w_j}{z_j}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. $(**)$

Observamos también que:

f es un producto de Blaschke de grado $d \iff$
g es un producto de Blaschke de grado $d-1$.

Aplicando la inducción, el problema $(**)$ tendrá solución $\iff$
$\tilde{Q}_{n-1} \geq 0$, donde

$$\tilde{Q}_{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{w_j}{z_j} \overline{\frac{w_k}{z_k}}}{1 - z_j \overline{z_k}} y_j \overline{y_k}. \quad (\square)$$

Por tanto, sólo nos queda por demostrar que

$$Q_n \geq 0 \iff \tilde{Q}_{n-1} \geq 0,$$

suponiendo que $z_n = w_n = 0$.

Bajo dicha hipótesis,

$$Q_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} x_j \overline{x_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} x_j \overline{x_k} + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \overline{x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} x_n \overline{x_k} + x_n \overline{x_n}$$

(valores conjugados)

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} x_j \overline{x_k} + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} x_j \overline{x_n} + |x_n|^2 \quad \odot$$

Puesto que $\left| x_n + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \right|^2 = |x_n|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} x_j \overline{x_n} + \left| \sum_{j=1}^{n-1} x_j \right|^2$

$$= |x_n|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} x_j \overline{x_n} + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n-1} x_k}$$

$$= |x_n|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} x_j \overline{x_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_j \overline{x_k},$$

se sigue de la identidad $\odot$ arriba que

$$Q_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}\, x_j\overline{x_k} - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_j\overline{x_k} + \Big|x_n+\sum_{j=1}^{n-1} x_j\Big|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}} - 1\right] x_j\overline{x_k} + \Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big|^2$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}} - 1 = \frac{z_j\overline{z_k} - w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}} = \frac{1-\frac{w_j}{z_j}\overline{\left(\frac{w_k}{z_k}\right)}}{1-z_j\overline{z_k}}\cdot z_j\overline{z_k},$$

obtenemos de la definición (□) de $\tilde{Q}_{n-1}$ que

$$Q_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-\frac{w_j}{z_j}\overline{\left(\frac{w_k}{z_k}\right)}}{1-z_j\overline{z_k}}\cdot x_j z_j\cdot\overline{x_k z_k} + \Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big|^2$$

$$= \tilde{Q}_{n-1}(x_1z_1,\dots,x_{n-1}z_{n-1}) + \Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big|^2.$$

Ahora es claro que $\tilde{Q}_{n-1}\geq 0 \Rightarrow Q_n\geq 0$.
Eligiendo $x_n = -\sum_{j=1}^{n-1} x_j$, se sigue también que $Q_n\geq 0 \Rightarrow \tilde{Q}_{n-1}\geq 0$.
Esto completa la demostración. ⊠

- Analizando los comentarios sobre los productos de Blaschke que aparecen a lo largo de la prueba anterior, así como los rangos de las matrices correspondientes a las formas cuadráticas involucradas: Q_n, Q_n', $\tilde{Q}_{n-1}$, puede deducirse lo siguiente:

Si $Q_n\geq 0$, entonces el problema de interpolación de Pick-Nevanlinna solución única $\Leftrightarrow$ $\det(Q_n)=0$.

Si $\det(Q_n)=0$ y el rango de la matriz de Q_n es $m(<n)$, entonces la función (única) que realiza la interpolación es un producto de Blaschke de grado m.