⑤ M, 23/02/2021

Comparaciones entre las métricas hiperbólica y pseudo-hiperbólica

ρ: métrica p.h. en $\mathbb{D}$; d = métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$

$$\rho(z,w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|$$

Propiedad	ρ	d
Acotada	✓	✗
Riemanniana	✗	✓
Completa	✓	✓
Aditividad a lo largo de geodésicas	✗	✓

$$d(z,w) = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)}$$

(en algunos textos no lleva $\frac{1}{2}$)

- La hiperbólica tiene algunas ventajas. Sin embargo, en varios contextos (separación de puntos en algún sentido, etc.) ambas tienen las mismas propiedades y la fórmula para la métrica p.h. es más cómoda de usar y muchos autores la prefieren.

Reformulación del Lema de Schwarz-Pick:

Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, entonces $\forall z,w \in \mathbb{D}$

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z,w). \qquad \left(\Leftrightarrow d(f(z),f(w)) \leq d(z,w)\right)$$

Es este enunciado el que nos ayudará a resolver el problema de interpolación básico formulado antes:

Problema. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ (es decir, $|w_1|, |w_2| \leq 1$), ¿cuándo existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$ $(f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}})$ y $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$?

Respuesta. Esto es posible $\Leftrightarrow$ $\rho(w_1, w_2) \leq \rho(z_1, z_2)$.

• De hecho, ya tenemos la implicación directa: $\Rightarrow$, gracias a Schwarz–Pick. ¿Cómo ver la recíproca? Construyendo una f concreta que realice la interpolación.

¿Qué tipo de función debe ser f? ¿Se podrá elegir en alguna subclase especial de las funciones analíticas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$?

¿Cómo se podría generalizar el criterio dado arriba para n puntos, con $n>2$? ¿En qué términos debe formularse?

Veremos la respuesta a todas estas preguntas, obtenida de forma independiente por G. Pick (1916) y R. Nevanlinna (1919).

• Primero tenemos que definir un tipo importante de funciones.

PRODUCTOS FINITOS DE BLASCHKE

Def'n. Un producto finito de Blaschke es una función de la forma

$$B(z)=\lambda\prod_{j=1}^{n}\varphi_{a_j}(z)=\lambda\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j-z}{1-\overline{a_j}z},$$

donde $|\lambda|=1$, $|a_j|<1$, para $j\in\{1,2,\dots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$.

El número n es el grado del producto de Blaschke.

Para $n=0$, entendemos como un producto de Blaschke de grado cero la función constante $B(z)=\lambda$, $|\lambda|=1$.

Ejemplos. $z=-\varphi_0(z)$: producto de Blaschke de grado 1.

$z\cdot\frac{1-2z}{2-z}=z\cdot\varphi_{\frac{1}{2}}(z)$: producto de Blaschke de grado 2.

Propiedades. (1) $B\in H(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$; de hecho, $B\in H(D(0;R))$, donde $R=\min\limits_{1\le j\le n}\frac{1}{|a_j|}=\frac{1}{\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|}>1$.

(2) $\forall z\in\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$, $|B(z)|=1$; por tanto, $\forall z\in\mathbb{D}$, $|B(z)|\leq 1$.

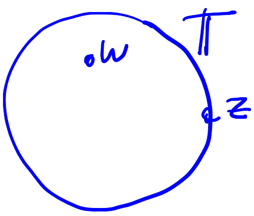
(3) $B(\mathbb{D})=\mathbb{D}$. De hecho, $\forall w\in\mathbb{D}$, $B^{-1}(\{w\})=\{z\in\mathbb{D} : B(z)=w\}$ tiene n elementos, contando multiplicidades.

Dem. □ (1) Obvio, ya que B es una función racional cuyo denominador se anula en los puntos $\frac{1}{\overline{a_j}}$, $1\leq j\leq n$.

(2) $j\in\{1,2,\dots,n\}$, $|z|=1 \Rightarrow |\varphi_{a_j}(z)|=1 \Rightarrow |B(z)|=1$.

Principio del módulo máximo: $|B(z)|\leq 1$, $\forall z\in\mathbb{D}$.

(3) Sea $w\in\mathbb{D}$. $\forall z\in\mathbb{T}$ tenemos $|w|<1=|B(z)|$. El Teorema de Rouché implica que las funciones $B(z)$ y $B(z)-w$ tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}$, el dominio acotado por la curva $\mathbb{T}$. Por su definición, B tiene exactamente n ceros en $\mathbb{D}$ (contando multiplicidades): $a_1, a_2, \dots, a_n$. Por tanto, la ecuación $B(z)-w=0$ tiene también n soluciones en $\mathbb{D}$. ⊠



• Las 3 propiedades mencionadas (de hecho, formuladas en una versión más débil) caracterizan los productos de Blaschke finitos.

Proposición. Si $f\in H(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$, $|f(z)|=1$ para todo $z\in\mathbb{T}$ y f tiene n ceros en $\mathbb{D}$ (contando multiplicidades), entonces f es un producto de Blaschke de grado n.

Dem. □ Sean $a_1, a_2, \dots, a_n\in\mathbb{D}$ los ceros de f en $\mathbb{D}$ y sea B un producto de Blaschke con los mismos ceros: $B(z)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{a_j}(z)$. Entonces, debido a la cancelación de los factores lineales $z-a_j$, la función $\frac{f(z)}{B(z)}$ tiene sólo singularidades evitables en $\mathbb{D}$ y, por tanto, puede extenderse hasta una función $\frac{f}{B}\in H(\mathbb{D})$.

Además, $\frac{f}{B} \in C(\overline{\mathbb{D}})$, por hipótesis (no tiene ceros en $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$).

Por hipótesis, $\left|\frac{f}{B}\right|=1$ en $\mathbb{T}$; por el Principio del módulo máximo, $\left|\frac{f}{B}\right|\leq 1$ en $\mathbb{D}$.

La función $\frac{B}{f}$ tiene las mismas propiedades, luego también $\left|\frac{B}{f}\right|\leq 1$ en $\mathbb{D}$. Se sigue que $\left|\frac{f}{B}\right|=1$ en $\mathbb{D}$, siendo $\frac{f}{B}\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Teorema de la aplicación abierta $\Rightarrow$ bien $\frac{f}{B}(\mathbb{D})$ es abierto, bien $\frac{f}{B}\equiv cte$ $\Rightarrow$ $\frac{f}{B}\equiv cte=\lambda \Rightarrow |\lambda|=1$

$\Rightarrow f=\lambda B$, un producto de Blaschke de grado n. $\boxtimes$

- Los diversos resultados sobre la interpolación suelen ir unidos a otros sobre diversos tipos de aproximación. Esto también ocurre en este contexto. El siguiente teorema se deduce de un resultado de 1911 sobre los coeficientes de Taylor de las funciones analíticas con parte real positiva relacionado de Carathéodory y de otro de Schur de 1917. (también probado por Toeplitz)

Teorema (Carathéodory). Si $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f(\mathbb{D})\subseteq\overline{\mathbb{D}}$ (es decir, $f(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$ o $f\equiv\lambda$, con $|\lambda|=1$), entonces existe una sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ de productos de Blaschke finitos t.q. $\forall z\in\mathbb{D}$, $B_n(z)\to f(z)$, $n\to\infty$.

Más específicamente, podemos elegir los B_n de manera que $gr(B_n)\leq n$ y que los primeros n coeficientes de B_n coincidan con los de f: si $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$, $\forall n\geq 0$ podemos encontrar B_n t.q.
$$B_n(z)=c_0+c_1z+\dots+c_{n-1}z^{n-1}+b_n^{(n)}z^n+b_{n+1}^{(n)}z^{n+1}+\dots$$

de manera que $f(z)-B_n(z)=z^n h_n(z)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall z\in\mathbb{D}$

($h_n\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$). (cero de multiplicidad $\geq n$ en $z=0$)

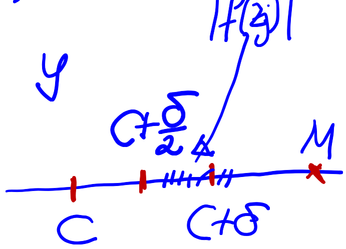
• En lo que sigue, usaremos el siguiente lema. (Una vez que hayamos visto los espacios de Hardy, la conclusión pasará a ser automática y ya no necesitará ninguna prueba.)

$\boxed{\text{Lema. Sea } f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),\ C>0 \text{ y } n\in\mathbb{N}. \text{ Si para todo } z\in\mathbb{D} \text{ se satisface la desigualdad } |z^n f(z)|\le C, \text{ entonces } \forall z\in\mathbb{D},\ |f(z)|\le C.}$

Dem. □ Distinguimos entre dos casos: $f\equiv$ cte y $f\not\equiv$ cte.

(1) $f\equiv c_0$. Si $\forall z\in\mathbb{D}$ $|z^n c_0|\le C$, tomando límite cuando $z\to 1$ se sigue que $|c_0|\le C$.

(2) $f\not\equiv$ cte. Sea $M=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|$ (un valor que puede ser finito o $=+\infty$). Para deducir lo que se afirma, basta ver que $M\le C$, así que supongamos lo contrario: $M>C$. Entonces $\exists\,\delta>0$ t.q. $M\geq C+\delta$. Según el Principio del módulo máximo, el valor M no se puede alcanzar en ningún punto del disco, así que $\exists$ una sucesión $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ en $\mathbb{D}$ t.q. $|z_j|\to 1^-$, $j\to\infty$ y $|f(z_j)|\geq C+\frac{\delta}{2}$. Entonces, por hipótesis:



$$\left(C+\frac{\delta}{2}\right)|z_j^n|\le|z_j^n f(z_j)|\le C.$$

Tomando $\lim_{j\to\infty}$, se sigue que $C+\frac{\delta}{2}\le C$, #. Esto prueba que $M\le C$. ⊠

(contradicción)

• Usando el Lema, es fácil ver que si $\forall n\in\mathbb{N}$ encontramos un B_n con las propiedades indicadas, entonces tendremos:

$$\forall z\in\mathbb{D},\ B_n(z)\to f(z),\ n\to\infty.$$

En efecto, para cada n tendremos un B_n y una función $h_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que $f(z) - B_n(z) = z^n h_n(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo se seguirá
$$|z^n h_n(z)| \le |f(z)| + |B_n(z)| \le 2, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$
y, por el Lema probado, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tendremos también $|h_n(z)| \le 2$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Por tanto, para cualquier $z \in \mathbb{D}$ fijo $(|z|<1)$:
$$|f(z) - B_n(z)| = |z|^n |h_n(z)| \le 2|z|^n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dem. del Tma. de Carathéodory. □ Por inducción sobre n (el número de condiciones).

Base inductiva: $n=1$. $|c_0| = |f(0)| \le 1$, así que existen dos casos posibles: $|c_0| = 1$ y $|c_0| < 1$.

Si $|c_0| = 1$, entonces $f \equiv c_0$ y podemos elegir $B_0 \equiv c_0$, un producto de Blaschke de grado 0.

Si $|c_0| < 1$, elegimos $B_0 = \varphi_0$: $B_0(z) = \dfrac{c_0 - z}{1 - \overline{c_0} z}$, un producto de Blaschke de grado 1 que satisface $b_0 = B_0(0) = c_0$, tal y como se pedía. (En ambos casos, $gr(B_0) \le 1 = n$.)

Paso inductivo. Supongamos que para cada $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $g(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ existe un producto de Blaschke B_{n-1} con las propiedades indicadas: $gr(B_{n-1}) \le n-1$ y $b_0 = c_0, \dots, b_{n-2} = c_{n-2}$ (esto es, $g(z) - B_{n-1}(z)$ tiene en $z=0$ un cero de orden $\ge n-1$).

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Vamos a construir B_n, su producto correspondiente.

Si $f \equiv c_0$, de nuevo podemos elegir $B_n(z) \equiv c_0$.
Si $f \not\equiv$ cte (y, por tanto, $|f(z)|<1$ para todo $z \in \mathbb{D}$), vamos a considerar la función g dada por

$$\boxed{\circledast \quad g(z) = \frac{\varphi_{f(0)}(f(z))}{z} = \frac{1}{z} \frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)}, \quad z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}.}$$

Observando que

$$\lim_{z\to 0} g(z) = -\lim \frac{f(z)-f(0)}{z} \cdot \frac{1}{1-\overline{f(0)}f(z)}$$
$$= -\frac{f'(0)}{1-|f(0)|^2},$$

debido al Teorema de la singularidad evitable de Riemann, sabemos que g se puede extender a todo $\mathbb{D}$ como función analítica, definiendo

$$g(0) = -\frac{f'(0)}{1-|f(0)|^2}.$$

Además, observamos que

$$|zg(z)| = |\varphi_{f(0)}(f(z))| < 1, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

por el Lema probado antes podemos concluir que

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D} \qquad (\text{es decir, } g(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}).$$

Usando la hipótesis inductiva, sabemos que existe B_{n-1}, un producto de Blaschke de grado $\leq n-1$ y tal que $g - B_{n-1}$ tiene en $z=0$ un cero de orden ≥ 1. Por tanto, $zg(z) - zB_{n-1}(z) = z(g(z) - B_{n-1}(z))$ tiene en $z=0$ un cero de multiplicidad $\geq n$. Obviamente, $gr(zB_{n-1}(z)) \leq n$.

Consideremos ahora la función B_n, definida mediante

$$B_n(z) = \varphi_{f(0)}(zB_{n-1}(z)) = \frac{f(0) - zB_{n-1}(z)}{1 - \overline{f(0)}zB_{n-1}(z)} .$$

Lema. Si B_n es un producto de Blaschke de grado n y $a \in \mathbb{D}$, entonces la composición $\varphi_a \circ B_n$ es otro producto de Blaschke de grado n. (Demostración: EJERCICIO.)

Puesto que $zB_{n-1}(z)$ es un producto de Blaschke de grado $\leq n$, por el Lema se sigue lo mismo para $B_n(z)$ definido arriba.

Veamos que B_n tiene la propiedad deseada: que $f - B_n$ tiene en $z=0$ un cero de orden $\geq n$. Calculamos directamente:

$$(*) \Rightarrow zg(z) = \varphi_{f(0)}(f(z)) \Rightarrow f(z) = \varphi_{f(0)}(zg(z))$$

(ya que $\varphi_{f(0)}$ es una involución), luego

$$f(z) - B_n(z) = \frac{f(0) - zg(z)}{1 - \overline{f(0)}\,zg(z)} - \frac{f(0) - zB_{n-1}(z)}{1 - \overline{f(0)}\,zB_{n-1}(z)}$$

$$= \frac{\left[\cancel{f(0)} - zg(z) - |f(0)|^2 zB_{n-1}(z) + \cancel{\overline{f(0)}z^2 g(z)B_{n-1}(z)}\right] - \left[\cancel{f(0)} - zB_{n-1}(z) - |f(0)|^2 zg(z) + \cancel{\overline{f(0)}z^2 g(z)B_{n-1}(z)}\right]}{(1 - \overline{f(0)}\,zg(z))(1 - \overline{f(0)}\,zB_{n-1}(z))}$$

$$= \frac{z\left[B_{n-1}(z) - g(z) - |f(0)|^2 B_{n-1}(z) + |f(0)|^2 g(z)\right]}{(1 - \overline{f(0)}\,zg(z))(1 - \overline{f(0)}\,zB_{n-1}(z))}$$

$$= \frac{(1 - |f(0)|^2)\, z\,(B_{n-1}(z) - g(z))}{(1 - \overline{f(0)}\,zg(z))(1 - \overline{f(0)}\,zB_{n-1}(z))} .$$

Esta función es analítica en $\mathbb{D}$ y tiene en $z=0$ un cero de multiplicidad $\geq n$, porque $zB_{n-1}(z) - zg(z)$ tiene la misma propiedad y no hay cancelaciones con el denominador. (Éste no se anula por la desigualdad triangular invertida, p.ej.:

$$\left|1-\overline{f(0)}\, z g(z)\right| \geq 1 - |f(0)|\,|z|\,|g(z)| > 0.)$$

Esto completa la demostración inductiva. $\boxtimes$

- El teorema de Schur que caracteriza los coeficientes de Taylor de las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ con $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ permite deducir el Teorema de Carathéodory probado. Puede enunciarse de dos maneras diferentes. Sin embargo, en el libro de Garnett no se demuestra; ni siquiera se enuncia, sólo se menciona. Una prueba detallada pero larga puede verse en el libro de M. Tsuji "Potential Theory in Modern Function Theory," Chelsea/Maruzen, 1975. Si el tiempo lo permite, una vez visto el espacio de Hardy H^2, podremos dar una demostración sencilla (de un enunciado alternativo).

<u>Teorema de Pick-Nevanlinna.</u> Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$, con $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ y $w_1, w_2, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$, existe una función $f \in H(\mathbb{D})$ t.q. $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ y $f(z_k) = w_k$, $k=1,2,\dots,n$ si y sólo si la forma cuadrática

$$Q_n(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-w_j \overline{w_k}}{1-z_j \overline{z_k}}\, h_j \overline{h_k}$$

es semidefinida positiva.

Cuando eso se cumple, podemos elegir f que sea un producto de Blaschke de grado $\leq n$.

• Tenemos que: $Q_n(h_1,h_2,\dots,h_n) = \mathbf{h} A \mathbf{h}^*$,

donde $\mathbf{h} = [h_1\ h_2 \dots h_n]_{1\times n}$, $A = \left[\dfrac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}\right]_{n\times n}$,

$$\mathbf{h}^* = \overline{\mathbf{h}}^t = \begin{bmatrix} \overline{h_1} \\ \overline{h_2} \\ \vdots \\ \overline{h_n} \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

• Recordemos que, según el criterio de Sylvester, Q_n es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ todos los menores principales de A son ≥ 0 (no sólo los menores directores sino todos los menores principales). [Es definida positiva $\Leftrightarrow$ todos los menores directores de A son >0.]

• En el caso $n=2$, el Teorema de Pick-Nevanlinna nos dice que la interpolación $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$ es posible para alguna función $f \in H(\mathbb{D})$ con $f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ $\Leftrightarrow$ la matriz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} & \dfrac{1-w_1\overline{w_2}}{1-z_1\overline{z_2}} \\[2ex] \dfrac{1-w_2\overline{w_1}}{1-z_2\overline{z_1}} & \dfrac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2} \end{bmatrix}$$ es semidefinida positiva.

Esto es $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 = \dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} \geq 0$ y

$$\Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} \dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} & \dfrac{1-w_1\overline{w_2}}{1-z_1\overline{z_2}} \\[2ex] \dfrac{1-w_2\overline{w_1}}{1-z_2\overline{z_1}} & \dfrac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2} \end{vmatrix} \geq 0.$$

La primera condición es claramente $\iff |w_1| \leq 1$, algo que hay que exigir trivialmente (pues $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$).

La segunda es equivalente a la desigualdad

$$\frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)} \geq \frac{(1-w_1\overline{w_2})\overline{(1-w_1\overline{w_2})}}{(1-z_1\overline{z_2})\overline{(1-z_1\overline{z_2})}} = \frac{|1-w_1\overline{w_2}|^2}{|1-z_1\overline{z_2}|^2}$$

$$\iff \quad \frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}{|1-w_1\overline{w_2}|^2} \geq \frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{|1-z_1\overline{z_2}|^2}$$

$$\iff \quad 1-|\varphi_{w_1}(w_2)|^2 \geq 1-|\varphi_{z_1}(z_2)|^2$$

(por la identidad para los automorfismos de $\mathbb{D}$ vista antes:

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$$
)

$$\iff \quad |\varphi_{w_1}(w_2)|^2 \leq |\varphi_{z_1}(z_2)|^2$$

$$\iff \quad \rho(w_1,w_2) \leq \rho(z_1,z_2)$$

$$\left(\iff \quad \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(w_1,w_2)}{1-\rho(w_1,w_2)} \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z_1,z_2)}{1-\rho(z_1,z_2)}\right).$$

Esto demuestra que la desigualdad para z_1, z_2, w_1, w_2 que se deduce del Lema de Schwarz-Pick, además de ser necesaria, también es suficiente.

- Pick-Nevanlinna se puede demostrar por inducción.