4 J, 18/02/2021

• Recordemos: dada una función λ, continua y acotada inferiormente: $\lambda(z) \geq \delta > 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$ (esta condición podría relajarse mucho, pero sólo nos interesarán estos casos), podemos definir la longitud (respecto a λ) de una curva rectificable γ (con la traza $\{\gamma\} \subseteq \mathbb{D}$) como

$$\ell_\lambda(\gamma) = \int_\gamma \lambda(z)|dz| = \int_a^b \lambda(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt,$$

donde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$, (En lugar de rectificable, con frecuencia se pide que sea C^1 a trozos en $[a,b]$.) También podemos definir una distancia (respecto a λ) como sigue:

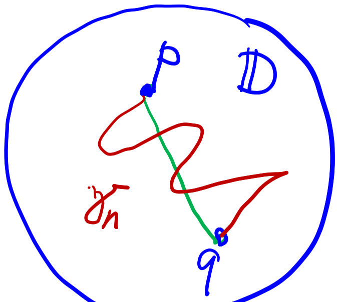
$$d_\lambda(p,q) = \inf_\gamma \ell_\lambda(\gamma) = \inf_\gamma \int_\gamma \lambda(z)|dz|, \quad p,q \in \mathbb{D},$$

tomando el ínfimo sobre todas las curvas especificadas (bien rectificables, bien C^1 a trozos, siempre contenidas en $\mathbb{D}$).

Proposición. Bajo las hipótesis mencionadas, d_λ es una métrica en $\mathbb{D}$.

Dem. □ • $d_\lambda(p,q) \geq 0$, $\forall p,q \in \mathbb{D}$: obvio.

• $d_\lambda(p,p) = 0$ es trivial. Veamos que $d_\lambda(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$.



$d_\lambda(p,q) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \gamma_n$ (C^1 a trozos) desde p hasta q tal que $\int_{\gamma_n} \lambda(z)|dz| < \frac{1}{n}$.

Entonces $\frac{1}{n} > \int_{\gamma_n} \lambda(z)|dz| \geq \delta \int_{\gamma_n} |dz| = \delta\,\ell(\gamma_n) \geq \delta|p-q|$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |p-q| = 0$.

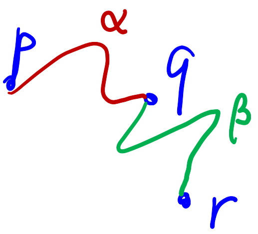
• $d_\lambda(q,p) = d_\lambda(p,q)$ porque $\int_\gamma \lambda(z)|dz|$ no cambia si se invierte la orientación de γ (recorriéndola de q a p).

- $\forall p,q,r\in\mathbb{D}$ $\quad d_\lambda(p,r)\le d_\lambda(p,q)+d_\lambda(q,r)$:

Sean $\quad A=d_\lambda(p,q)$, $B=d_\lambda(q,r)$.

Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\alpha$, C^1 a trozos desde p hasta q y β, C^1 a trozos desde q hasta r, tales que

$$\int_\alpha \lambda(z)|dz|<A+\frac{\varepsilon}{2},\qquad \int_\beta \lambda(z)|dz|<B+\frac{\varepsilon}{2}.$$



Sea $\gamma=\alpha+\beta$, la curva C^1 a trozos que une p con r, pasando por q y recorriendo primero la traza de α y luego la de β.

Entonces

$$d_\lambda(p,r)\le\int_{\alpha+\beta}\lambda(z)|dz|=\int_\alpha\lambda(z)dz+\int_\beta\lambda(z)dz<A+B+\varepsilon.$$

Puesto que esto se cumple para $\varepsilon>0$ arbitrario, se sigue que

$d_\lambda(p,r)\le A+B$, $\quad$ Q.E.D. $\boxtimes$

<u>Ejemplos</u>. (1.) $\lambda(z)=1$, $\forall z\in\mathbb{D}$:

$$d_\lambda(p,q)=\inf_\gamma\int_\gamma|dz|=\inf_\gamma \ell(\gamma)=|p-q|$$

(d_λ es la <u>métrica euclídea</u>).

(2.) $\lambda(z)=\dfrac{1}{1-|z|^2}$, $z\in\mathbb{D}$. (Algunos autores prefieren $\dfrac{2}{1-|z|^2}$.)

$d_\lambda=$ la <u>métrica hiperbólica</u> (o <u>de Poincaré</u> o <u>de Bergman</u>) en $\mathbb{D}$.

<u>Motivación</u> para considerarla: es invariante conforme, de nuevo, debido al caso de igualdad en Schwarz-Pick.

$$f\in Aut(\mathbb{D}) \Rightarrow \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}, \ \forall z\in\mathbb{D}.$$

Cambio de variable (biyectivo, luego legítimo): $w=f(z) \Rightarrow$

$|dw| = |f'(z)||dz| \Rightarrow$

$$\int_\gamma \lambda(z)|dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_\gamma \frac{|f'(z)|\,|dz|}{1-|f(z)|^2} = \int_{f(\gamma)} \frac{|dw|}{1-|w|^2}$$

$$= \int_{f(\gamma)} \lambda(w)|dw|$$

$\Rightarrow \ell_\lambda(f(\gamma)) = \ell_\lambda(\gamma)$, $\forall \gamma$ C^1 a trozos en $\mathbb{D}$ y $\forall f\in Aut(\mathbb{D})$.

(Aquí conviene notar que toda δ, C^1 a trozos desde $f(p)$ hasta $f(q)$ es $f(\gamma)$, para una γ similar de p a q)

Por la Proposición demostrada anteriormente,

$$d_\lambda(f(p),f(q)) = d_\lambda(p,q), \quad \forall p,q\in\mathbb{D}.$$

- Desde luego, la fórmula que define la métrica hiperbólica:

$$\boxed{d_\lambda(p,q) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}}$$ (γ une p con q)

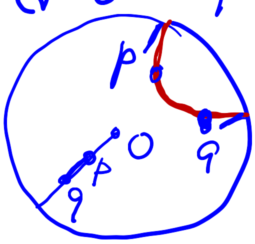
no es muy efectiva para calcular las distancias. Veremos que se puede escribir en forma explícita.

<u>Teorema</u>. $$\boxed{d_\lambda(p,q) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(p,q)}{1-\rho(p,q)} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\frac{p-q}{1-\bar{p}q}\right|}{1-\left|\frac{p-q}{1-\bar{p}q}\right|}, \quad p,q\in\mathbb{D}.}$$

Las curvas γ para las que se alcanza el ínfimo en la fórmula

$$d_\lambda(p,q) = \inf_\gamma \int_\gamma \lambda(z)|dz|$$

(las <u>geodésicas</u> en la métrica hiperbólica desde p hasta q) son los arcos de circunferencias perpendiculares a $\partial\mathbb{D}$ que pasan por p y q, entendiendo como un arco



$\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$

un segmento radial cuando $0, p$ y q son colineales.

<u>Dem.</u> $\square$ Si $p,q\in\mathbb{D}$, $p\neq q$, $\exists f\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ t.q. $f(p)=0$, $f(q)=r\in\mathbb{R}$, $0<r<1$. (Basta tomar $f(z)=\mu\,\varphi_p(z)$ para un μ convenientemente elegido, $|\mu|=1$.) Puesto que

$$d_\lambda(p,q)=d_\lambda(f(p),f(q))=d_\lambda(0,r),$$

basta hallar la fórmula para $d_\lambda(0,r)$, $r\in(0,1)$. Sabemos que

$$d_\lambda(0,r)=\inf_\gamma\int_\gamma\frac{|dz|}{1-|z|^2}\underset{z=\gamma(t)}{=}\inf_\gamma\int_a^b\frac{|\gamma'(t)|\,dt}{1-|\gamma(t)|^2},$$

tomando el ínfimo sobre las $\gamma:[a,b]\to\mathbb{D}$, C^1 a trozos y t.q. $\gamma(a)=0$, $\gamma(b)=r\in(0,1)$.

Escribiendo $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, donde $x,y:[a,b]\to\mathbb{R}$ también son C^1 a trozos, observamos que, por un lado:

$$|\gamma'(t)|=|x'(t)+iy'(t)|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\geq|x'(t)|.$$

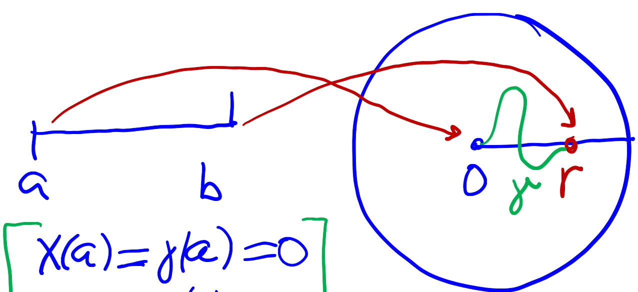
Por otro lado,

$$\frac{1}{1-|\gamma(t)|^2}=\frac{1}{1-(x(t)^2+y(t)^2)}\geq\frac{1}{1-x(t)^2},$$

así que para toda γ de las mismas características

$$\int_a^b\frac{|\gamma'(t)|\,dt}{1-|\gamma(t)|^2}\geq\int_a^b\frac{|x'(t)|\,dt}{1-x(t)^2}\underset{x(t)=s}{\geq}\int_0^r\frac{ds}{1-s^2}\underset{\text{fracciones simples}}{=}\frac12\int_0^r\left(\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right)ds=\frac12\log\frac{1+r}{1-r}.$$

(= si el cambio es inyectivo)



$$\boxed{\begin{aligned}x(a)&=\gamma(a)=0\\ x(b)&=\gamma(b)=r\end{aligned}}$$

Tomando el ínfimo sobre las curvas γ, obtenemos $\quad d_\lambda(0,r)=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$.

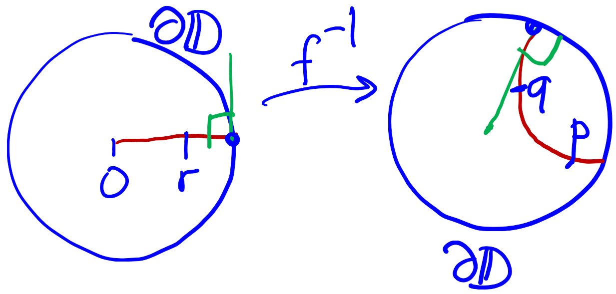
Este ínfimo se alcanza $\iff$ $y(t)\equiv y'(t)\equiv 0$ y $x(t)$ es inyectiva, lo cual significa que $\gamma(t)$ recorre el segmento $[0,r]$ "sin volver atrás" en ningún momento; es decir, γ es una parametrización del segmento $[0,r]$.

Volviendo al caso general (p,q):

$$d_\lambda(p,q)=d_\lambda(0,r)=d_\lambda(0,\mu\varphi_p(q))=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\mu\varphi_p(q)|}{1-|\mu\varphi_p(q)|}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(p,q)}{1-\rho(p,q)}.$$

Igualdad: sólo para las preimágenes por el automorfismo $f=\mu\varphi_p$ del segmento $[0,r]$, que son imágenes de $[0,r]$ por el inverso de f, que es otro automorfismo. Por tanto, son segmentos o arcos de circunferencias que son perpendiculares a la circunferencia unidad, $\partial\mathbb{D}$, debido a la propiedad conforme de las transformaciones de Möbius (preservación de ángulos).



$\boxtimes$

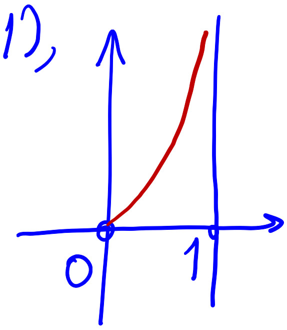
<u>**Observación.**</u> De la fórmula $d_\lambda(p,q)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(p,q)}{1-\rho(p,q)}$ se desprende lo siguiente:

Para una sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{D}$ y $p\in\mathbb{D}$,

- $d_\lambda(p_n,p)\to 0,\ n\to\infty \iff \rho(p_n,p)\to 0,\ n\to\infty;$
- $d_\lambda(p_n,p)\geq\delta,\ \forall n\in\mathbb{N} \iff \rho(p_n,p)\geq\delta',\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad(\delta>0)$ $\quad \delta'>0$

Razón: $u(r)=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$ es creciente en $[0,1)$,

$u(0)=0$, $u\in C[0,1)$.



También vemos que todo disco hiperbólico:

$$\Delta_\lambda(a;R)=\{z\in\mathbb{D}: d_\lambda(a,z)<R\}$$

es un disco pseudo-hiperbólico y, por tanto, euclídeo:

$$\Delta_\lambda(a;R)=\left\{z\in\mathbb{D}: \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(a,z)}{1-\rho(a,z)}<R\right\}$$

$$=\left\{z\in\mathbb{D}: \frac{1+\rho(a,z)}{1-\rho(a,z)}<e^{2R}\right\}$$

despejando $\rho(a,z)$

$$=\left\{z\in\mathbb{D}: \rho(a,z)<\frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}\right\}$$

$$=\left\{z\in\mathbb{D}: \rho(a,z)<\frac{e^{R}-e^{-R}}{e^{R}+e^{-R}}\right\}$$

$$=\{z\in\mathbb{D}: \rho(a,z)<\tanh R\}$$

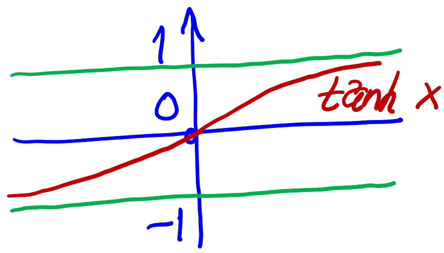
$$=\Delta(a,\tanh R)$$ ← en la métrica p.h.

$(0<\tanh R<1)$

$\tanh x=\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

$\operatorname{senh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$



- Por tanto, las tres topologías consideradas hasta ahora en $\mathbb{D}$: la euclídea, la inducida por la métrica hiperbólica, por la métrica p.h. y la inducida por la métrica hiperbólica, todas coinciden, al tener los mismos abiertos.
- Obsérvese que el disco con la métrica euclídea no es completo (al ser un subespacio del plano con la métrica

heredada que no es cerrado; alternativamente, $p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ es una sucesión de Cauchy en la métrica habitual de $\mathbb{D}$ que no converge a ningún $z \in \mathbb{D}$).

La completitud es una propiedad métrica, no topológica. ¿Es $(\mathbb{D}, d_\lambda)$ completo? ¿Es $p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ una sucesión de Cauchy?

Obsérvese que

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} = +\infty$$

(la métrica hiperbólica "aleja" la frontera), así que los casos van a ser distintos del caso euclídeo.

<u>Ejemplo</u>. Sea $p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(m > n)$

$$\rho(p_m, p_n) = \frac{p_m - p_n}{1 - p_m p_n} = \frac{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}}{1 - \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} = \frac{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}}{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m+n}}}$$

$$= \frac{2^m - 2^n}{2^n + 2^m - 1} \not\to 0 \quad \text{cuando } m > n \to \infty,$$

así que tampoco se tiene que

$$d_\lambda(p_m, p_n) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \rho(p_m, p_n)}{1 - \rho(p_m, p_n)} \to 0, \quad m > n \to \infty.$$

Por ejemplo,

$$\rho(p_{n+1}, p_n) = \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^n + 2^{n+1} - 1} = \frac{2^n}{2^n + 2^{n+1} - 1} \sim \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad d_\lambda(p_{n+1}, p_n) \sim \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 3.$$

Para el "ojo hiperbólico", ¡la distancia entre dos términos consecutivos de la sucesión es, esencialmente, constante!

Teorema. El espacio métrico $(\mathbb{D}, d_\lambda)$ es completo.

Dem. $\square$ Sea $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en la métrica hiperbólica. Entonces es una sucesión acotada: $\exists M>0$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_\lambda(p_n,0)\le M<+\infty$. Por tanto,

$$|p_n|\le \tanh M<1, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Puesto que $d_\lambda(p_m,p_n)\to 0$, $m>n\to\infty$, se sigue por las propiedades de la función $u(r)=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$ que

$$\rho(p_m,p_n)\to 0, \quad m>n\to\infty.$$

Pero

$$\rho(p_m,p_n)=\left|\frac{p_m-p_n}{1-\overline{p_m}p_n}\right|\geq\frac{|p_m-p_n|}{2}$$

$$\left(|1-\overline{p_m}p_n|\le 1+|\overline{p_m}||p_n| < 2\right)$$

$\Rightarrow$ $|p_m-p_n|\to 0$, $m>n\to\infty$ (la sucesión (p_n) es de Cauchy en la métrica euclídea en el plano). El plano con la métrica usual es completo $\Rightarrow$ $\exists p_0\in\mathbb{C}$ t.q. $p_n\to p_0$, $n\to\infty$ (en la m. euclídea).

$$|p_n|\le\tanh M<1 \Rightarrow |p_0|\le\tanh M<1 \Rightarrow p_0\in\mathbb{D}.$$

Sabemos que, dado $\varepsilon>0$ $\exists N$ t.q. $\forall m>n\geq N$,

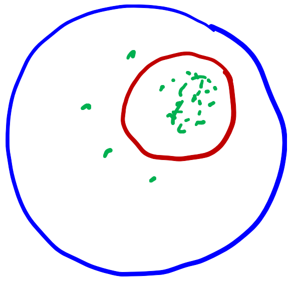
$$\rho(p_m,p_n)=\frac{|p_m-p_n|}{|1-\overline{p_m}p_n|}<\varepsilon.$$

Manteniendo $n\geq N$ fijo y dejando que $m\to\infty$, vemos que

$$\rho(p_0,p_n)=\frac{|p_0-p_n|}{|1-\overline{p_0}p_n|}\le\varepsilon$$

y así $\forall n\geq N$. Se sigue que $\rho(p_0,p_n)\to 0$, $n\to\infty$ y, por tanto, $d_\lambda(p_n,p_0)\to 0$, $n\to\infty$. $\boxtimes$

• Examinando la prueba, vemos que, si una sucesión en $\mathbb{D}$ es de Cauchy, tanto en la métrica hiperbólica como en la p.h., todos sus miembros (a partir de un índice) están contenidos en un disco (hiperbólico, p.h. y euclídeo a la vez) y que, por tanto, en la métrica euclídea convergen a un punto de $\mathbb{D}$. Es decir, ninguna sucesión de Cauchy (en cualquiera de las métricas d_λ, ρ) puede converger a un punto de la frontera en la topología usual.

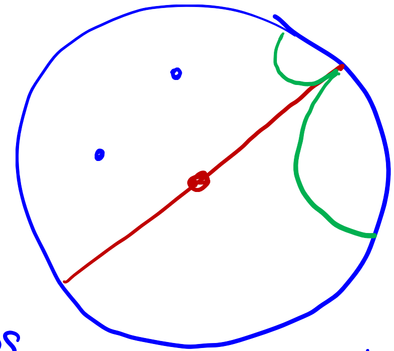


Dicho de otra manera, $(\mathbb{D},\rho)$ también es completo; en este caso, la frontera $\partial\mathbb{D}$ no se aleja — la métrica ρ "no la ve".

• La métrica hiperbólica nos proporciona un modelo de geometría no euclídea.

"puntos": los puntos de $\mathbb{D}$

"rectas": las geodésicas (extendidas hasta $\partial\mathbb{D}$), es decir, los diámetros de $\mathbb{D}$ y los arcos circulares ortogonales a $\partial\mathbb{D}$.

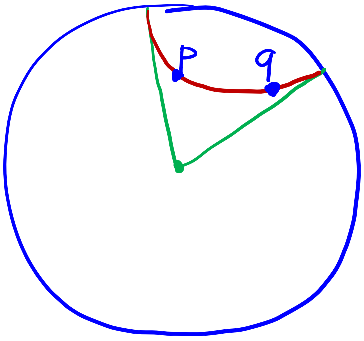


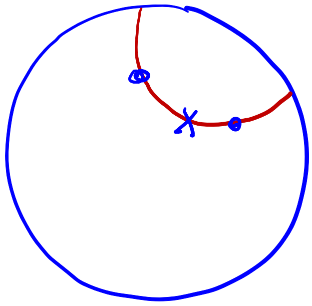
Con estos objetos, $(\mathbb{D},d_\lambda)$ satisface casi todos los axiomas de Hilbert de la geometría euclídea; por ejemplo:

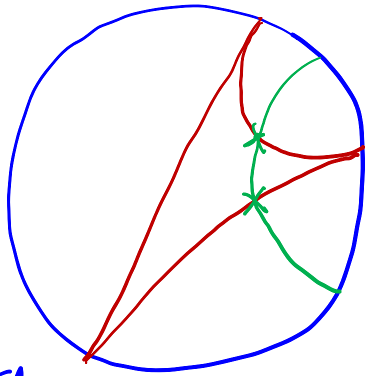
— Para cada 2 puntos distintos existe una única recta que pasa por ambos;

— Entre cada dos puntos distintos de una recta existe otro intermedio (axioma de continuidad);

— Cada recta que corta un lado de un triángulo (sin pasar por uno de los vértices) también corta otro lado del triángulo (axioma de Pasch), etc

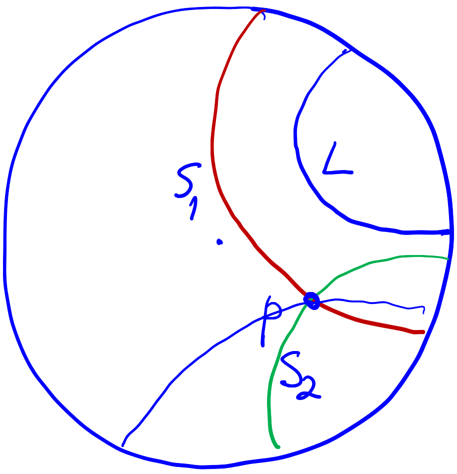






El único axioma de la geometría euclídea que no cumple, es el **postulado de las paralelas** de Euclides:

— Dado un punto p y una recta L tales que $p \notin L$, existe una única recta S tal que $p \in S$ y $S \cap L = \emptyset$.



En $(\mathbb{D}, d_\lambda)$ existen infinitas rectas que pasan por p y son paralelas a L.

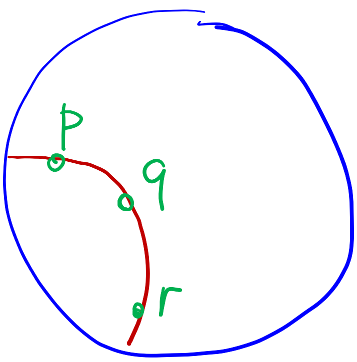
(Este modelo fue propuesto por Poincaré.)

Propiedad. Si p, q y r pertenecen a la misma geodésica en $(\mathbb{D}, d_\lambda)$, con q entre p y r (siendo todos distintos), entonces

$$d_\lambda(p,r) = d_\lambda(p,q) + d_\lambda(q,r)$$

y

$$\rho(p,r) < \rho(p,q) + \rho(q,r).$$



(Ejercicio)