Interpolación en espacios de Hardy (2)

- Explicaremos cómo se puede demostrar la implicación difícil en el Tma. de Carleson:

$(z_n)_n$ uniformemente separada $\Rightarrow$ (z_n) interpolante para H^∞.

Idea de Peter Jones.

Para $(z_n)_n$ uniformemente separada en $\mathbb{D}$ y $w=(w_n)_n \in \ell^\infty$, queremos construir una función $f_w \in H^\infty$ t.q. $\forall k\in\mathbb{N}$, $f(z_k)=w_k$. De hecho, nos conviene hacerlo de tal manera que exista $K>0$ t.q. $\|f_w\|_\infty \le K\|w\|_\infty$. ¿Cómo hacerlo?

Supongamos que hemos logrado construir una sucesión de funciones $F_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $n\in\mathbb{N}$, con las siguientes propiedades:

(A) $F_n(z_k) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases}$, $k,n\in\mathbb{N}$;

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(z)| \le K < \infty$, $\forall z\in\mathbb{D}$.

Entonces la función f_w, definida por $f_w(z)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n F_n(z)$, tendrá las siguientes propiedades:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} w_n F_n(z)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|\,|F_n(z)| \overset{(B)}{\le} K\cdot\|w\|_\infty, \quad \forall N\in\mathbb{N}.$$

Debido a esta acotación uniforme y al Tma. de Montel, existirá una subsucesión $(N_j)_j$ de $\mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n=1}^{N_j} w_n F_n(z) \underset{K}{\rightrightarrows} f_w(z)$, $\forall K\subset\mathbb{D}$ y para cierta $f_w\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (Tma. de Weierstrass).

Además, $|f_w(z)| \le \limsup_{j\to\infty} \left|\sum_{n=1}^{N_j} w_n F_n(z)\right| \le K\|w\|_\infty \Rightarrow f_w\in H^\infty$ y $\|f_w\|_\infty \le K\|w\|_\infty$.

También es obvio que $f_w(z_k) = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{N_j} w_n F_n(z_k) = w_k$.

(sólo el término k-ésimo sobrevive)

Por tanto, f_w es una función con las propiedades que necesitamos.

Pregunta clave. ¿Cómo construir las F_n que buscamos?

El siguiente lema aparece también en el trabajo de Carleson.

Lema clave. Sea $(z_n)_n$ una sucesión uniformemente separada, con $\prod_{j\neq k} \rho(z_j, z_k) = \prod_{j\neq k} \left|\frac{z_j - z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right| \geq \delta > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Entonces
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\bar{z}_j z_k|^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - |\varphi_{z_j}(z_k)|^2\right) \leq \log\frac{e}{\delta^2}.$$

(identidad básica para los automorfismos)

Dem. $\square$ Sea $\alpha_{jk} = 1 - |\varphi_{z_j}(z_k)|^2$. Entonces, por hipótesis:

$\rho(z_j, z_k)^2 = 1 - \alpha_{jk}$ y, por tanto,
$$\delta^2 \leq \prod_{j\neq k} \rho(z_j,z_k)^2 = \prod_{j\neq k} (1-\alpha_{jk}) \leq e^{-\sum_{j\neq k}\alpha_{jk}}$$
(pq. $1-x \leq e^{-x}$)
$$\Rightarrow \sum_{j\neq k} \alpha_{jk} \leq \log\frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \sum_j \alpha_{jk} \leq \alpha_{kk} + \log\frac{1}{\delta^2} \leq 1 + \log\frac{1}{\delta^2} = \log\frac{e}{\delta^2}.$$
$\boxtimes$

Prop. Supongamos que $(z_n)_n$ cumple las mismas condiciones que en el Lema Clave. Si definimos las funciones
$$G_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z} (1-|z_k|^2), \quad n \in \mathbb{N}$$
entonces $\forall n \in \mathbb{N}$:

(1) $G_n \in H(\mathbb{D})$; (2) $\operatorname{Re} G_n(z_n) \leq 2\log\frac{e}{\delta^2}$.

(ordenamos los z_n como siempre: $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \dots < 1$)

Dem. □ • $\left|\dfrac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z}\right|(1-|z_k|^2)\le \dfrac{2}{1-|z_k||z|}(1+|z_k|)(1-|z_k|)$

(si $|z|\le R$) $\longrightarrow$ $\le \dfrac{4}{1-R}(1-|z_k|)$.

Recordemos que $(z_n)_n$ interpolante $\Rightarrow (z_n)_n$ Blaschke. Por tanto, la serie que define G_n converge uniformemente en cada $K\Subset\mathbb{D}$ $\Rightarrow \forall n,\ G_n\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Recordemos que $\operatorname{Re}\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{1-|a|^2}{|1-a|^2}$, $|a|<1$ (visto antes).

$k\ge n \Rightarrow |z_k|\ge|z_n| \Rightarrow \operatorname{Re} G_n(z_n) = \sum_{k=n}^{\infty}(1-|z_k|^2)\operatorname{Re}\dfrac{1+\bar{z}_k z_n}{1-\bar{z}_k z_n}$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}(1-|z_k|^2)\frac{1-|\bar{z}_k z_n|^2}{|1-\bar{z}_k z_n|^2} \le \sum_{k=n}^{\infty}(1-|z_k|^2)\frac{1-|z_n|^4}{|1-\bar{z}_k z_n|^2}$$

$$\le 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(1-|z_k|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_k z_n|^2} \le 2\log\frac{e}{\delta^2}. \quad \boxtimes$$

↑ Lema Clave

Fin de la demostración.

□ Ahora ya podemos construir las funciones F_n. Las definimos directamente como sigue:

$$F_n(z)=\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 \frac{B_n(z)}{B_n(z_n)}\, e^{\varepsilon(G_n(z_n)-G_n(z))},$$

donde $\varepsilon=\dfrac{1}{2\log\frac{e}{\delta^2}}$, $\quad B_n(z)=\prod_{k\ne n}\dfrac{|z_k|}{z_k}\varphi_{z_k}(z)$.

Es evidente que: (A) $F_n(z_k)=\begin{cases}0, & k\ne n \quad (B_n(z_k)=0)\\ 1, & k=n \quad \left(\text{Los 3 factores de } F_n(z_n) \text{ son } =1\right)\end{cases}$.

sólo nos falta comprobar

B) $\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(z)|\le K<\infty,\ \forall z\in\mathbb{D}$.

Veremos que sirve el valor $K = \frac{2e}{\delta} \log \frac{e}{\delta^2}$.

$(z_n)_n$ uniformemente separada con cte $\delta > 0 \Rightarrow$

$$(*) \quad \left|\frac{B_n(z)}{B_n(z_n)}\right| \le \frac{1}{|B_n(z_n)|} = \frac{1}{\prod_{k\ne n} |\varphi_{z_k}(z_n)|} \le \frac{1}{\delta}, \quad \forall z \in \mathbb{D}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prop. $\Rightarrow \operatorname{Re} G_n(z_n) \le 2 \log \frac{e}{\delta^2} = \frac{1}{\varepsilon}$ (por la def'n de ε) $\Rightarrow$

$$(\cdot) \quad \left|e^{\varepsilon G_n(z_n)}\right| = e^{\varepsilon \operatorname{Re} G_n(z_n)} \le e \Rightarrow$$

$$|F_n(z)| = \left(\frac{1-|z_n|^2}{|1-\bar{z}_n z|}\right)^2 \left|\frac{B_n(z)}{B_n(z_n)}\right| \left|e^{\varepsilon G_n(z_n) - \varepsilon G_n(z)}\right|$$

$$\overset{(*)}{\underset{(\cdot)}{\le}} \frac{e}{\delta} \left(\frac{1-|z_n|^2}{|1-\bar{z}_n z|}\right)^2 e^{-\varepsilon \operatorname{Re} G_n(z)}. \qquad (**)$$

Sea $$u_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1-|z_k|^2}{|1-\bar{z}_k z|}\right)^2.$$ Entonces

$$u_n(z) - u_{n+1}(z) = \left(\frac{1-|z_n|^2}{|1-\bar{z}_n z|}\right)^2 > 0 \Rightarrow u_n(z) \downarrow 0, \ n \to \infty. \ (\forall z \in \mathbb{D}).$$

Además, para las funciones definidas antes:

$$G_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z} (1-|z_k|^2),$$

obtenemos

$$\operatorname{Re} G_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1-|z_k|^2|z|^2}{|1-\bar{z}_k z|^2} (1-|z_k|^2) \leftarrow$$

cálculo similar al de antes, esta vez con z en lugar de z_n

$$\ge \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-|z_k|^2)^2}{|1-\bar{z}_k z|^2} \leftarrow 1-|z_k|^2|z|^2 \ge 1-|z_k|^2$$

$$= u_n(z).$$

Esto, junto con $(**)$, implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(z)| \leq \frac{e}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(z) - u_{n+1}(z)\right) e^{-\varepsilon u_n(z)}$$

$t \leq e^t - 1$ $\longrightarrow$

$t = \varepsilon\left(u_n(z) - u_{n+1}(z)\right)$

$$\leq \frac{e}{\delta\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\varepsilon(u_n(z)-u_{n+1}(z))} - 1 \right] e^{-\varepsilon u_n(z)}$$

$$= \frac{e}{\delta\varepsilon} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\varepsilon u_{n+1}(z)} - e^{-\varepsilon u_n(z)} \right]}_{\text{suma telescópica}}$$

Suma parcial: $e^{-\varepsilon u_{n+1}(z)} - e^{-\varepsilon u_1(z)} \to 1 - e^{-\varepsilon u_1(z)} \leq 1$

$(u_n(z) \downarrow 0)$

$$\leq \frac{e}{\delta\varepsilon}$$

$$= \frac{2e}{\delta} \log \frac{e}{\delta^2}.$$

$\boxtimes$

Generalización a otros H^p (Shapiro-Shields)

Interpolación ponderada: $(z_n)_n$ sucesión en $\mathbb{D}$; $j \neq k \Rightarrow z_j \neq z_k$.

$0 < p \leq \infty$. Consideremos el operador lineal

$$T_p : H^p \to \ell^\infty, \quad T_p(f) = \left((1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_n) \right)_{n=1}^{\infty}.$$

(Entendemos que $T_\infty(f) = (f(z_n))_n$, como antes.)

Si $(z_n)_n$ no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{D}$ (algo lógico que conviene pedir), entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$.

Sabemos que $|f(z_n)| (1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{H^p}$

(mencionado en clase, Hoja 2 de problemas). De hecho, se cumple más:

Prop. $f \in H^p \Rightarrow \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{\frac{1}{p}} |f(z)| = 0.$

(Conviene comparar esto con un problema de la Hoja 3 para A^p, con $\frac{2}{p}$ en lugar de $\frac{1}{p}$).

- Por tanto, no sólo tenemos que $T_p : H^p \to \ell^\infty$ sino que, de hecho, $T_p : H^p \to c_0$ (sucesiones que $\to 0$).

Recordamos que $0<p<q<\infty \Rightarrow \ell^p \subset \ell^q \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty$. Por tanto, es posible que $T_p : H^p \to \ell^p$ para algunas sucesiones $(z_n)_n$ y para otras, no.

Def'n. Se dice que $(z_n)_n$ (una sucesión de puntos distintos en $\mathbb{D}$) es interpolante para H^p $(0<p\leq\infty)$ si el operador acotado T_p satisface la condición $T_p(H^p)=\ell^p$.

- Esto extiende la definición vista en el caso $p=\infty$.

Tma. (Shapiro–Shields, 1961). Sea $0<p\leq\infty$ y (z_n) una sucesión de puntos distintos en $\mathbb{D}$. Entonces:
$(z_n)_n$ es interpolante para $H^p \Leftrightarrow (z_n)_n$ es uniformemente separada.

- La demostración de $(\Rightarrow)$ es parecida a la del caso $p=\infty$.
En cuanto a la implicación $(\Leftarrow)$, el uso de Tma. de la gráfica cerrada muestra que, suponiendo que (z_n) es uniformemente separada, entonces $T_p(H^p)\subseteq \ell^p$.
Lo que es difícil es establecer que $T_p(H^p)\supseteq \ell^p$; es decir, que $\forall w=(w_n)\in \ell^p \ \exists f\in H^p$ t.q. $f(z_n)(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}}=w_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

- Prueba original de Shapiro–Shields: uso de los residuos, dualidad de los espacios H^p, problemas lineales extremales, etc. (necesitaríamos abordar 2 capítulos del libro de Duren).
El caso $0<p<1$ admite una construcción concreta (Kabaila): más elemental. No veremos ninguna de las dos pruebas.

En su lugar, veremos la simplificación de Schuster y Seip (de 1998) de la demostración del Tma. de Shapiro y Shields. Ésta se basa en un resultado de Neville (1977) que simplifica parte de la prueba de Shapiro y Shields.

<u>Tma. (Neville-Shapiro-Shields).</u> Si $(z_n)_n$ es uniformemente separada en $\mathbb{D}$, entonces $\forall f \in H^p$, $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|f(z_k)|^p < \infty$

(Dicho de otra manera, $T_p : H^p \to l^p$.)

• Omitiremos la prueba de Neville, que se puede consultar en el Capítulo 4, Sección 6 de Duren y Schuster. Basta probar la afirmación en el caso $p=2$, debido a la técnica de factorización de Riesz. La demostración pasa por observar que si $f \in H^2$, entonces f' está en cierto espacio ponderado de Bergman, A_1^2 y por la desigualdad del valor medio y por las propiedades de los discos pseudo-hiperbólicos.

• Veamos la demostración de Schuster y Seip (1997) de la generalización de Shapiro y Shields $(1 < p \leq \infty)$.

<u>Dem.</u> $\square$ • Partimos de una sucesión uniformemente separada, $(z_k)_k$. Por el Tma. anterior, $\forall f \in H^p$, $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2) \cdot |f(z_k)|^p < \infty$, es decir, $T_p : H^p \to l^p$. Es fácil ver que el operador lineal T_p tiene gráfica cerrada, luego es acotado: $\exists C > 0$ t.q.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\,|f(z_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{H^p}, \quad \forall f \in H^p.$$

• Existe una manera equivalente de expresar la separación uniforme: si escribimos $b_n(z) = \frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n - z}{1-\bar{z}_n z}$ y $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n(z)$, derivando obtenemos:

$$B' = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k\neq n} b_n\Big)\cdot b_n' \qquad \text{(observando que } \prod_{k\neq n} b_n(z_j)=0,\ j\neq k\text{)}$$

$$\Rightarrow (1-|z_k|^2)\,|B'(z_k)| = (1-|z_k|^2)\,|b_k'(z_k)| \prod_{n\neq k}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|$$

$$= \Big(1-\underbrace{|b_k(z_k)|}_{=0}{}^2\Big)\prod_{n\neq k}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right| \geq \delta .$$

Y así $\forall k\in\mathbb{N}$.

- Supongamos que $p>1$ y $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\,|w_k|^p<\infty$. Definamos

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} w_k\,\frac{B(z)}{(z-z_k)B'(z_k)}\ , \quad z\in\mathbb{D}$$

(en analogía con las fórmulas que aparecen en la interpolación de Lagrange –en una de sus formas– y en la de Guichard).

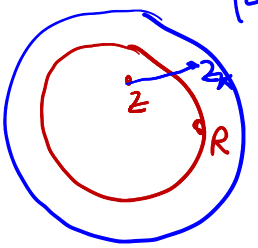
Como antes,

$$\left|w_k\,\frac{B(z)}{(z-z_k)\,B'(z_k)}\right| \leq |w_k|\,\frac{1-|z_k|^2}{|z-z_k|}\cdot\frac{1}{(1-|z_k|^2)\,|B'(z_k)|}$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\,|w_k|\,(1-|z_k|^2)\,\frac{1}{|z-z_k|}$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\,\frac{2}{1-R}\,(1-|z_k|^2)\,|w_k|. \qquad (C)$$

Si $|z|\leq R$ y $k\geq N_0 \Rightarrow |z-z_k|\geq \frac{1-R}{2}$ $\Big\}\Rightarrow$



$$\left.\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\,|w_k|^p<\infty\\ \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)<\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\,|w_k|<\infty \quad (S)$$

Desigualdad de Hölder: $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\,|w_k| = \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}}|w_k|\cdot(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\,|w_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$(C)+(S) \Rightarrow$ la serie que define f: $\sum_{k=1}^{\infty} w_k \frac{B(z)}{(z-z_k)B'(z_k)}$ converge uniformemente en cada disco $\{z : |z| \le R\}$, $0<R<1$

$\Rightarrow f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (Weierstrass).

Las sumas parciales: $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{B(z)}{(z-z_k)B'(z_k)}$ satisfacen $S_n(z_k) = w_k$, $k=1,2,\dots,n$. Luego $(S_n(z_k) \to f(z_k), n\to\infty, \forall k)$

$f(z_k) = w_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

- Finalmente, veamos que $f \in H^p$. Sea q t.q. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y $h \in L^q(\mathbb{T}, dm)$.

$$\int_0^{2\pi} S_n(e^{it}) h(e^{it}) e^{it}\, dm(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{B'(z_k)} \int_0^{2\pi} \frac{B^*(e^{it}) h(e^{it}) e^{it}}{e^{it}-z_k} dm(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{B'(z_k)} \int_0^{2\pi} \frac{B^*(e^{it}) h(e^{it})}{1-e^{-it}z_k} dm(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{B'(z_k)} P_+(B^*h)(z_k)$$

Clases 21-22: Proyección de Riesz (Szegö), acotada de $L^q(\mathbb{T})$ sobre H^q, $1<q<\infty$

Entonces

$$\left| \int_0^{2\pi} S_n(e^{it}) h(e^{it}) e^{it} dm(t) \right| \le \sum_{k=1}^{n} |w_k| (1-|z_k|^2) \frac{|P_+(B^*h)(z_k)|}{(1-|z_k|^2)|B'(z_k)|}$$

$$\le \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n} |w_k| (1-|z_k|^2) \, |P_+(B^*h)(z_k)|$$

Hölder

$$\le \frac{1}{\delta} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^p (1-|z_k|^2) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (1-|z_k|^2) |P_+(B^*h)(z_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C \| P_+(B^*h) \|_{H^q} \le C \|P_+\| \cdot \|B^*h\|_{L^q} = C\|P_+\| \|h\|_{L^q}.$$

Ejercicio conocido: $\forall h \in L^q$, $\left| \int u h \, d\mu \right| \le M \|h\|_{L^q} \Rightarrow u \in L^p$.

La cte. $C\|P_+\|$ es la misma $\Rightarrow \exists K>0$ t.q. $\|S_n\|_{H^p} \le K$, $\forall n$.

$S_n \to f$ puntualmente. Lema de Fatou $\Rightarrow f \in H^p$. $\boxtimes$

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$

Interpolación en A^p (K. Seip)

- Dos artículos: uno con ejemplos relevantes (1993) y otro con los teoremas principales (Invent. Math., 1994).

- Área hiperbólica: si $\Omega \subseteq \mathbb{D}$ es medible, su área hiperbólica es
$$A_h(\Omega) = \int_\Omega \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}.$$
Es invariante por automorfismos: $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$
$$\Rightarrow A_h(\varphi(\Omega)) = A_h(\Omega).$$
Para $\Omega = \Delta(\zeta, r) = \{z : \rho(z,\zeta) < r\}$, disco pseudohiperbólico,
$$A_h(\Omega) = A_h(\varphi_\zeta(\Delta(\zeta,r))) = A_h(\Delta(0,r)) = A_h(D(0;r)) = \dots = \frac{r^2}{1-r^2}.$$

- Densidades de Nykvist. Para $\Gamma = (z_k)$ una sucesión uniformemente discreta: $\delta(\Gamma) = \inf_{j \neq k} \rho(z_j, z_k) > 0$ y $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, $\varphi(\Gamma) = (\varphi(z_k))_k$ sigue teniendo la misma propiedad.

La función de contar de Γ (sucesión de ptos distintos en $\mathbb{D}$) es:
$$n(\Gamma, \zeta, r) = \left| \{ z_n \in \Gamma : z_n \in \Delta(\zeta, r) \} \right|.$$
Si definimos
$$E(\Gamma, \zeta, r) = \frac{\int_0^r n(\Gamma, \zeta, \rho)\, d\rho}{2\int_0^r A_h(\Delta(\zeta,\rho))\, d\rho},$$
esta función nos dará el "número medio de puntos de Γ por unidad de área hiperbólica para $\rho \in (0,r)$. Podemos definir la densidad uniforme superior de Nykvist como

(densidad inferior: lím inf, inf)

$$D^+(\Gamma) = \limsup_{r \to 1^-} \left(\sup_{\zeta \in \mathbb{D}} E(\Gamma, \zeta, r) \right).$$

$\boxed{D^+(\Gamma) < \infty \Leftrightarrow \Gamma \text{ es unif}^{\text{te}} \text{ discreta}}$

- Si definimos $T_p : A^p \to \ell^p$ como $T_p(f) = \left((1-|z_k|^2)^{\frac{2}{p}} f(z_k) \right)_k$, la sucesión $\Gamma = (z_k)_k$ es interpolante para $A^p \Leftrightarrow T_p(A^p) = \ell^p$.

Tma (Seip, 1994). Sea $0 < p < \infty$ y $\Gamma = (z_k)_k$ una sucesión en $\mathbb{D}$. Entonces Γ es interpolante para $A^p \Leftrightarrow \Gamma$ es uniformemente discreta y $D^+(\Gamma) < \frac{1}{p}$.

$\boxed{\text{*FIN DEL CURSO*}}$