INTERPOLACIÓN EN ESPACIOS DE HARDY

• Un problema similar al de Pick-Nevanlinna sería: caracterizar todos los pares de sucesiones complejas $((z_n),(w_n))$ con $z_n \in \mathbb{D}$, $w_n \in \mathbb{C}$ t.q. $\exists f \in H^p$ $(0<p\leq\infty)$ con la propiedad de que $f(z_n)=w_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Este problema parece muy complicado. Por ello, el matemático norteamericano R. Creighton Buck propuso ($\approx$ 1955) la siguiente pregunta modificada.

Problema. Caracterizar todas las sucesiones interpolantes (universales), eso es, todas las sucesiones $(z_n)_n$ en $\mathbb{D}$ t.q. $\forall$ sucesión $(w_n)_n \in \ell^\infty$, $\exists f\in H^\infty$ con $f(z_n)=w_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(Obs'n: Esto implica que $j\neq k \Rightarrow z_j\neq z_k$)

• W. Hayman y D.J. Newmann obtuvieron progresos parciales relevantes, que se publicaron (con cierto retraso) en 1959. Sin embargo, el matemático sueco Lennart Carleson resolvió el problema de forma independiente y lo publicó antes, en 1958.

• En 1961, H. Shapiro y A. Shields encontraron una generalización apropiada para H^p, $0<p<\infty$, y también probaron una caracterización análoga. Kabaila hizo lo mismo para $0<p<1$ entre 1960 y 1963, con una demostración sencilla.

• Se encontraron varias simplificaciones de las demostraciones de Carleson y Shapiro-Shields: Neville en 1977 para $p=\infty$ y Schuster y Seip en 1998 $(1<p<\infty)$.

• Suponiendo una condición más fuerte que la caracterización que dio Carleson, Hayman en 1959 había obtenido una fórmula para la función interpolante. En 1980, P. Jones obtuvo una fórmula explícita en general (sin hipótesis adicionales). En 1981, Vinogradov, Gorin y Khruschev obtuvieron algunas simplificaciones.

• Otros avances: D. Marshall, J. Garnett, A. Nicolau (años 90).

• Para poder enunciar el Teorema de Carleson, tendremos que definir algunos conceptos. El primero es muy fácil, aunque no será de ayuda directa aquí (y sí lo será en los espacios de Bergman).

Def'n. Una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ (de puntos distintos) en $\mathbb{D}$ es uniformemente discreta (o separada en la métrica hiperbólica) si

$$\inf_{m\neq n} d(z_m, z_n) > 0.$$

Observación. Esto es $\Leftrightarrow \inf_{m\neq n} \rho(z_m, z_n) > 0.$

Recordemos que $d(z_m, z_n) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z_m,z_n)}{1-\rho(z_m,z_n)}$ y $\rho(z_m,z_n) = \left|\frac{z_m - z_n}{1-\bar{z}_m z_n}\right|$. Como ya observamos antes, la función $u(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, $u: [0,1) \to [0,\infty)$ es creciente y $0 < \delta \leq x < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2}\log\frac{1+\delta}{1-\delta} \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} < \infty.$

Por tanto, $(z_n)_n$ es separada en la métrica d si y sólo si lo es en la métrica ρ.

• Es fácil comprobar la existencia de sucesiones de este tipo. Pueden construirse explícitamente.

Ejemplos. (1) Sucesión uniformemente discreta en un radio (para simplificar, en $[0,1)$). Sea $\delta \in (0,1)$.

Procedemos por inducción: $r_0=0$, $r_1=\delta$; dado $r_n\in(0,1)$, sea $r_{n+1}=\dfrac{\delta+r_n}{1+\delta r_n}=-\varphi_{-r_n}(\delta)\in\mathbb{D}$; $r_{n+1}>0 \Rightarrow r_{n+1}\in(0,1)$.

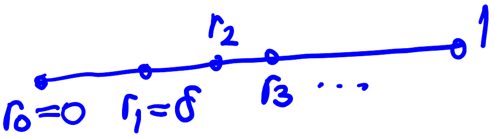
↑ típico automorfismo: $\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar a z}$

Calculamos: esto es

$$\Leftrightarrow r_{n+1}+\delta r_n r_{n+1}=\delta+r_n \Leftrightarrow \delta=\frac{r_{n+1}-r_n}{1-r_n r_{n+1}}=\rho(r_n,r_{n+1}).$$

Con esto no basta; hemos de ver que

$$n\geq 0,\ k>0 \Rightarrow \rho(r_n,r_{n+k})\geq\delta.$$



Es claro que $r_{n+1}=\dfrac{\delta+r_n}{1+\delta r_n}>r_n$ ($\Leftrightarrow \delta>\delta r_n^2$). Por tanto,

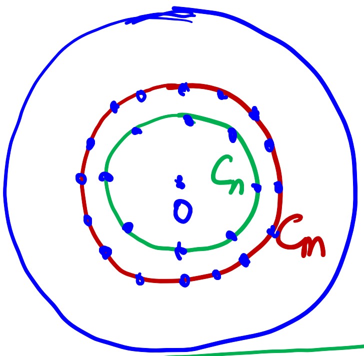
$$\rho(r_n,r_{n+k})=\frac{r_{n+k}-r_n}{1-r_{n+k}r_n}>\frac{r_{n+1}-r_n}{1-r_{n+k}r_n}>\frac{r_{n+1}-r_n}{1-r_{n+1}r_n}=\delta.$$

Ahora ya se sigue que $\inf\limits_{m\neq n}\rho(r_n,r_m)\geq\delta$. De hecho, el ínfimo es $=\delta$ (se alcanza cuando $m=n+1$).

(2) Sucesión uniformemente discreta con puntos equidistribuidos en circunferencias.

$S=\{2^n$ puntos equidistribuidos en C_n, $n\in\mathbb{N}\}$,

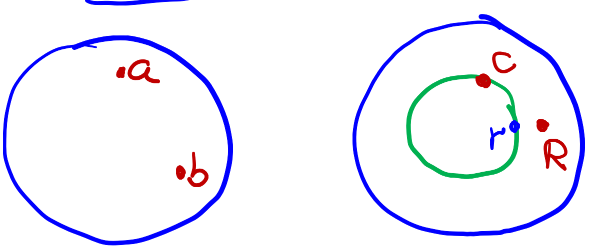
$C_n=\{z: |z|=1-\frac{1}{2^n}\}$, $n\in\mathbb{N}$.



Antes de comprobar esto, demostraremos un resultado auxiliar.

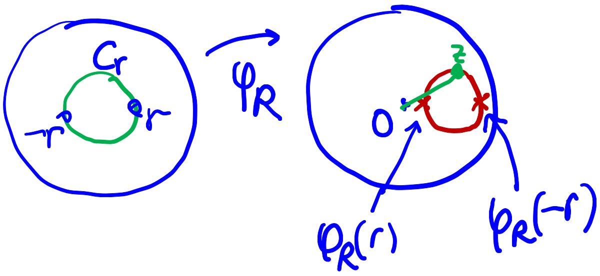
Lema $\rho(a,b)\geq\rho(|a|,|b|)$.

Dem □ $\exists\varphi\in Aut(\mathbb{D})$ t.q. $\varphi(b)=R\in(0,1)$, $\varphi(a)=c$, donde $|c|=r<R$. Puesto que $\rho(a,b)=\rho(\varphi(a),\varphi(b))=\rho(c,R)$, sólo tenemos que probar la desigualdad



$\rho(c,R) \geq \rho(r,R)$.

Para comprobar esto, observamos que el automorfismo φ_R lleva la circunferencia $C_r = \{z : |z| = r\}$ a otra circunferencia, también simétrica respecto al eje real. Su intersección con el eje real consta de dos puntos: $0 < \varphi_R(r) = \frac{R-r}{1-Rr} < \varphi_R(-r) = \frac{R+r}{1+Rr}$ (fácil de comprobar).



Por tanto, $\forall z \in C_r$,

$$\frac{R-r}{1-Rr} \leq |\varphi_R(z)|,$$

lo cual $\Rightarrow$ $\rho(r,R) \leq \rho(C_r,R)$. $\boxtimes$

Seguimos con nuestro análisis. Tenemos que considerar 2 casos.

a) $z_j \in C_m$, $z_k \in C_n$, $m > n$ (sin pérdida de generalidad).

Entonces

$$\rho(z_j,z_k) \overset{\text{Lema}}{\geq} \rho(|z_j|,|z_k|) = \rho\left(1-\frac{1}{2^m}, 1-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}}{1-\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}}{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{m+n}}} \longleftarrow \left(\times \frac{2^m}{2^m}\right)$$

$$= \frac{2^{m-n}-1}{2^{m-n}+1-2^{-n}} \geq \frac{2^{m-n}-1}{2^{m-n}+1} \geq \frac{1}{3} \quad (\text{caso } m = n+1)$$

p.q. $\phi(x) = \frac{x-1}{x+1} \nearrow$, $x \in (0,\infty)$; $x = 2^{m-n} \geq 2$.

b) $z_j, z_k \in C_n$. La distancia ρ es invariante por rotaciones, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_j = r_n \left(= 1-\frac{1}{2^n}\right)$, $z_k = r_n e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$. Tenemos que

$$\rho(z_j,z_k) = \rho\left(r_n, r_n e^{\frac{2\pi i}{2^n}}\right) = \left|\frac{r_n - r_n e^{\frac{2\pi i}{2^n}}}{1-r_n^2 e^{\frac{2\pi i}{2^n}}}\right| = \frac{r_n\left|1-e^{\frac{2\pi i}{2^n}}\right|}{\left|1-r_n^2 e^{\frac{2\pi i}{2^n}}\right|}.$$

Calculamos: $|1-e^{ix}| = |1-\cos x - i \operatorname{sen} x| = \sqrt{(1-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2(1-\cos x)}$

$$= \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{x}{2}} = 2\left|\operatorname{sen}\tfrac{x}{2}\right| = 2\operatorname{sen}\tfrac{x}{2} \qquad (0 \le x \le \pi);$$

$$|1-Re^{ix}| = \sqrt{(1-R\cos x)^2 + (R\operatorname{sen}x)^2} = \sqrt{1+R^2-2R\cos x} \qquad \left(x = \tfrac{2\pi}{2^n}\right)$$

$$= \sqrt{(1-R)^2 + 2R(1-\cos x)} = \sqrt{(1-R)^2 + 4R\operatorname{sen}^2\tfrac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \rho(z_j, z_k) = \frac{2r_n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}}{\left[(1-r_n^2)^2 + 4r_n^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2^n}\right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-r_n^2}{2r_n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}}\right)^2}}$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-r_n^2}{2r_n \frac{2}{2^n}}\right)^2}}$$

Desigualdad de Jordan: $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x \ge \frac{2}{\pi}x$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1+r_n}{4r_n}\right)^2}}$$

pq. $(1-r_n)\cdot 2^n = \frac{1}{2^n}\cdot 2^n = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{4r_n}+\frac{1}{4}\right)^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{4r_1}+\frac{1}{4}\right)^2}} \qquad \left(r_n \ge r_1 = \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5},$$

Es importante observar que otros pares de puntos (los que no son consecutivos en la circunferencia de radio r_n) tienen mayores distancias pseudo-hiperbólicas.
Queda probado que la sucesión es uniformemente discreta.

• La siguiente observación nos llevaré a un concepto más especial (una propiedad más fuerte).

Supongamos que $(z_n)_n$ es una sucesión interpolante en $\mathbb{D}$ y fijemos $k\in\mathbb{N}$. Entonces $\exists f\in H^\infty$ t.q., en particular,

$f(z_k)=1$, $f(z_j)=0$, $\forall j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}$. Sea $\|f\|_\infty=M$ y B_k el producto de Blaschke cuyos ceros son

$z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots$ $\leftarrow$ $B_k(z)=\prod_{j\neq k}\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_j z}$.

Entonces $f=B_k g$, donde $g\in H^\infty$ y $\|g\|_\infty=\|f\|_\infty=M$ (Riesz).

Por tanto,

$$1=|f(z_k)|=|B_k(z_k)|\cdot|g(z_k)|\le M|B_k(z_k)|,$$

así que $|B_k(z_k)|\geq\frac{1}{M}$. Por la definición de B_k,

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\geq\frac{1}{M} \qquad \left(\text{o sea, } \prod_{j\neq k}\rho(z_j,z_k)\geq\frac{1}{M}\right)$$

y así $\forall k\in\mathbb{N}$. Luego $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\geq\frac{1}{M}$.

<u>Def'n.</u> Una sucesión $(z_n)_{n=1}^\infty$ de puntos distintos en $\mathbb{D}$ se denomina <u>uniformemente separada</u> si $\exists\delta>0$ t.q.

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\geq\delta.$$

<u>Obs'n.</u> Evidentemente, $\forall m\neq k$, $\left|\frac{z_m-z_k}{1-\bar{z}_m z_k}\right|\geq\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|$, así que toda sucesión uniformemente separada también es uniformemente discreta. El recíproco es falso, aunque eso todavía no es obvio.

• El siguiente resultado explica la importancia del concepto que acabamos de definir.

Tma. (Carleson, 1958). Una sucesión $(z_n)_n$ es interpolante para $H^\infty \Leftrightarrow (z_n)_n$ es uniformemente separada.

• Ya hemos probado $\Rightarrow$. La implicación $\Leftarrow$ es mucho más difícil.
(Además, aún no sabemos si existen o no sucesiones uniformemente separadas. ¡Necesitamos ejemplos!)

Def'n. Una sucesión $(z_n)_n$ en $\mathbb{D}$ se denomina exponencial si $\exists q \in (0,1)$ t.q.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-|z_{n+1}| \leq q\,(1-|z_n|). \qquad (E)$$

(**Obs'n.** $(E) \Rightarrow 1-|z_{n+1}| < 1-|z_n| \Rightarrow |z_n| < |z_{n+1}|,\ \forall n \in \mathbb{N}$.)

Ejemplo. $z_n = 1-\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión exponencial en $(0,1)$:
$$1-|z_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\,(1-|z_n|) \qquad \left(q=\tfrac{1}{2}\right),$$

Tma. (i) Si $(z_n)_n$ es exponencial, entonces es uniformemente separada y Blaschke.
(ii) Si $(z_n)_n$ es uniformemente separada y $0 \leq z_1 < z_2 < z_3 < \dots < 1$, entonces $(z_n)_n$ es exponencial. (recíproco parcial)

Dem. $\square$ (i) Veamos primero que (z_n) es una sucesión de Blaschke. Usaremos la inducción. $\forall j>k$: (por (E))
$$1-|z_j| \leq q\,(1-|z_{j-1}|) \leq q^2(1-|z_{j-2}|) \leq \dots \leq q^{j-k}(1-|z_k|) \qquad (*)$$
$$\Rightarrow 1-|z_n| \leq q^{n-1}(1-|z_1|),\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) \leq (1-|z_1|)\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1-|z_1|}{1-q} < \infty.$$

$$(*) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |z_j|-1 \geq -q^{j-k}(1-|z_k|) \\ 1-|z_k| = 1-|z_k| \end{array}\right\} (+)$$

$$\Rightarrow |z_j|-|z_k| \geq (1-q^{j-k})(1-|z_k|). \qquad (1)$$

También tenemos que

$$1-|z_j z_k| = 1-|z_j| + |z_j|(1-|z_k|) \leq q^{j-k}(1-|z_k|) + |z_j|(1-|z_k|)$$

$$\leq (1+q^{j-k})(1-|z_k|) \qquad (2)$$

Por el Lema visto antes,

$$\left|\frac{z_j-z_k}{1-\overline{z_j} z_k}\right| = \rho(z_j,z_k) \geq \rho(|z_j|,|z_k|) = \frac{|z_j|-|z_k|}{1-|z_j z_k|} \quad \begin{array}{l} j>k \Rightarrow \\ |z_j|>|z_k| \end{array} (!)$$

$$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\geq}} \frac{(1-q^{j-k})(1-|z_k|)}{(1+q^{j-k})(1-|z_k|)} = \frac{1-q^{j-k}}{1+q^{j-k}}, \quad \text{para } j>k.$$

Cuando $j<k$,

$$\rho(z_j,z_k) = \rho(z_k,z_j) \geq \frac{1-q^{k-j}}{1+q^{k-j}}.$$

Por tanto,

$$\prod_{j\neq k} \rho(z_j,z_k) = \prod_{\substack{j>k \\ \uparrow \\ n=j-k}} \rho(z_j,z_k) \cdot \prod_{\substack{j<k \\ \uparrow \\ n=k-j}} \rho(z_j,z_k) = \prod_{n=1}^{\infty} \rho(z_j,z_{j-n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \rho(z_k,z_{k-n})$$

$$\geq \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2.$$

Para la convergencia del último producto, basta comprobar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2 - 1\right|$. Veámosla:

$$\left|\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2-1\right| = 1-\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2 = \frac{4q^n}{(1+q^n)^2} < 4q^n.$$

Por tanto, la serie converge absolutamente y también el producto. Esto significa que, si $\delta = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2 > 0$ entonces

$$\prod_{j\neq k} \rho(z_j, z_k) \geq \delta > 0.$$

(ii) Sean $0 \leq z_1 < z_2 < z_3 < \dots < 1$ y $0 < \delta \leq \prod_{j\neq k} \rho(z_j, z_k) (< 1)$.

Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho(z_n, z_{n+1}) = \frac{z_{n+1}-z_n}{1-z_{n+1}z_n} \geq \delta \Rightarrow$

$$z_{n+1}-z_n \geq \delta(1-z_n z_{n+1}) \Rightarrow z_{n+1} \geq \frac{\delta + z_n}{1+\delta z_n}$$

$$\Rightarrow 1-z_{n+1} \leq 1-\frac{\delta+z_n}{1+\delta z_n} = \frac{(1-\delta)(1-z_n)}{1+\delta z_n} \leq \underbrace{(1-\delta)}_{=\delta' \in (0,1)}(1-z_n)$$

$\Rightarrow (z_n)_n$ es exponencial. $\boxtimes$

Observaciones. • Puede demostrarse que, si $0 \leq z_1 < z_2 < z_3 < \dots < 1$, entonces las 3 propiedades de la sucesión (z_n): uniformemente discreta, uniformemente separada y exponencial, son equivalentes. (Ejercicio)

• Usando otros razonamientos más delicados (condiciones uniformes tipo Blaschke) que toda sucesión uniformemente separada es Blaschke.

• Sin embargo, nuestro 2º ejemplo (2^n puntos equidistribuidos en la circunferencia $\{z : |z| = 1-\frac{1}{2^n}\}$) demuestra que una sucesión uniformemente discreta

no es necesariamente Blaschke: en efecto, en este caso,
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-|z_k|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot 2^n = \infty .$$

- Finalmente, esto también demuestra que una sucesión uniformemente discreta no es necesariamente uniformemente separada (si la anterior lo fuera, sería tb. una sucesión de Blaschke, pero ya sabemos que no lo es).

- Origen del término "uniformemente separada". Un manuscrito no publicado de D.J. Newmann (1961) muestra que $(z_n)_n$ es uniformemente separada $\Leftrightarrow$ el producto de Blaschke, B, con los ceros $(z_n)_n$, tiene la siguiente propiedad:

$\forall \varepsilon > 0$ (suficientemente pequeño), el conjunto de nivel $\{z \in \mathbb{D} : |B(z)| = \varepsilon\}$ = unión de curvas disjuntas (separadas), donde cada curva rodea un único z_n.

(Este resultado aparece publicado en un artículo de Hoffman de 1967.)