(26) J, 13/5/2021

INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES ENTERAS

Problema. Sean $(z_n)_n$ y (w_n) dos sucesiones infinitas, con los z_n distintos dos a dos. ¿Existe f entera ($f \in H(\mathbb{C})$) t.q. $\forall n$, $f(z_n) = w_n$?

La respuesta, en general, es no. Razón: si (z_n) tiene una subsucesión acotada, $(z_{n_k})_k$, entonces ésta tendrá una subsucesión, $(z_{n_{k_j}})_j$ convergente a un $a \in \mathbb{C}$. Si los $w_{n_{k_j}}$ son todos $= w$, tendremos $z_{n_{k_j}} \to a$, $f(z_{n_{k_j}}) = w_{n_{k_j}} = w \Rightarrow f \equiv w$ (por el Tma. de la unicidad). Y si sólo un w_m es $\neq w$, eso será imposible. Por tanto, parece razonable pedir que $(z_n)_n$ no tenga subsucesiones acotadas; equivalentemente, que $z_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Veremos que la respuesta será sí en este caso.

Para poder demostrar esto, necesitaremos repasar varios hechos acerca de las funciones enteras y meromorfas (que se suelen ver con frecuencia en un segundo curso de Variable Compleja).

Repaso: factorización de funciones enteras

- Si g es entera y $f = e^g$, entonces f es entera y $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$. Recíprocamente, si f es entera y $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$, entonces $\exists g$ entera t.q. $f = e^g$. (Tma. fundamental para los dominios simplemente conexos). Esto tiene una prueba muy sencilla: si $f \in H(\mathbb{C})$ y $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$, entonces $h = \frac{f'}{f}$ es entera y también lo es su primitiva, G ($G' = h = \frac{f'}{f}$). Entonces $F = f e^{-G}$ tiene derivada

nula en el plano: $F' = f' e^{-G} - f G' e^{-G} = e^{-G}(f' - fG') \equiv 0$.
Por tanto, $F \equiv cte \Rightarrow f = Ce^{G} = e^{g}$ (siendo $g = G + \log C$).

• Por el mismo razonamiento, si f tiene un número finito de ceros en $\mathbb{C}$, digamos un cero de multiplicidad m en $z=0$ y otros ceros $a_1, a_2, \dots, a_N$ (algunos, posiblemente, con repeticiones), es fácil ver que entonces
$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

• Obviamente, intentaríamos hacer lo mismo para un f con una cantidad infinita (numerable) de ceros pero necesitaríamos la convergencia del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$, por ejemplo, absoluta y uniforme en compactos, lo cual requeriría el mismo tipo de convergencia para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n}$ (clases 13 y 14).
Pero una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, aunque $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, no necesariamente cumple, p.ej., la condición "$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ converge".

• Por esta razón necesitamos introducir factores que mejoren la convergencia. Aquí entra en la escena la técnica desarrollada por Weierstrass.

Considerando una sucesión arbitraria $(a_n)_n$ con $a_n \neq 0$, $\forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, puede demostrarse que existen polinomios $(p_n)_n$ tales que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{p_n(z)}$ es convergente en cada $K \Subset \mathbb{C}$. Dicho producto converge uniforme y absolutamente de forma simultánea con la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)\right].$$

(De nuevo, tomamos la determinación principal del logaritmo, con $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$.)

Weierstrass observó que

$$\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \dots - \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n} - \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \dots$$

$$\Rightarrow \log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + \underbrace{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}_{p_n(z)} = -\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} - \dots,$$

Así definimos $\rightarrow p_n(z)$

$$\Rightarrow \left|\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)\right| \leq \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} + \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+2} + \dots$$

monotonía,

$$\leq \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1 + \frac{R}{|a_n|} + \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^2 + \dots\right)$$

serie geométrica

$$= \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \frac{1}{1-\frac{R}{|a_n|}},$$

siendo la suma $\displaystyle\sum_n \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}$ convergente. Por tanto,

(A veces basta con elegir $m_n = n$ y a veces no.)

converge $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{p_n(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$.

- $E_n(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^n}{n}}$ son los llamados **factores elementales** (de Weierstrass); los $E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$: **factores canónicos**.

Queda (esencialmente) demostrado el siguiente resultado.

Teorema (Weierstrass). Dada una sucesión arbitraria $(a_n)_n$ t.q. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, existe una f entera con precisamente estos ceros (contando las multiplicidades). Además, toda f de este tipo (y con un cero de orden m en $z=0$) puede escribirse como

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

$$= z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}},$$

donde g es entera y $m_1, m_2, \ldots \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} < \infty.$$

- Razón por la que conviene usar m_n en lugar de n:

a veces $\sum \frac{1}{|a_n|} = \infty$ pero $\sum \frac{1}{|a_n|^m} < \infty$, para cierto m.

<u>Ejemplo clásico.</u> $\operatorname{sen} \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$.

(Los únicos ceros de $\operatorname{sen} \pi z$ son $z_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$ y son todos simples.)

Puede demostrarse que $g(z) \equiv 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \pi z = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$,

pero $\left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{z}{-n}\right)\right) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$, $e^{\frac{z}{n} + \left(\frac{z}{-n}\right)} = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{sen} \pi z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).}$$

<u>Repaso: funciones meromorfas</u>

<u>Definición.</u> Se dice que f es <u>meromorfa</u> en <u>$\mathbb{C}$</u> si existe un conjunto discreto $A \subseteq \mathbb{C}$ (es decir, A no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$) y tal que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$ y cada punto de A es un <u>polo</u> de f. ($A = \emptyset$: f es entera)

(sustituyendo $\mathbb{C}$ por Ω en todos los sitios, obtenemos la definición de una función meromorfa en un dominio Ω.)

Es obvio que, si $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $g \not\equiv 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es meromorfa (por el principio de los ceros aislados).
Como corolario del Tma. de Weierstrass que acabamos de ver, se obtiene el recíproco.

Corolario. Toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es cociente de dos enteras.

Dem. ☐ Sea F meromorfa en $\mathbb{C}$ y $(a_n)_n$ sus polos. Si sólo son una cantidad finita, todo es elemental. Y si son una cantidad infinita, dado que no se pueden acumular en ningún punto de $\mathbb{C}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Por el Tma. de Weierstrass, $\exists g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ precisamente con los ceros en los puntos a_n (y con las mismas multiplicidades). Debido a la cancelación de todos los factores $(z-a_n)^k$ en el denominador (aplicando el Tma. de la singularidad evitable de Riemann), la función Fg es entera, digamos $Fg = f$ y entonces $F = \frac{f}{g}$. ☒

• Toda función meromorfa tiene, en cada polo b_n, su desarrollo de Laurent:
$$f(z) = \frac{c_{n,-k_n}}{(z-b_n)^{k_n}} + \dots + \frac{c_{n,-1}}{z-b_n} + g(z) \leftarrow \left(\text{función analítica en un } D(b_n, r)\right)$$
(k_n = orden del polo b_n).

Resulta que podemos construir funciones meromorfas con los polos y sus órdenes prescritos (arbitrarios). El resultado se puede extender para las meromorfas en un Ω (hay un trabajo asignado en este tema). Es mucho menos obvio que esto se puede hacer para todos los polos a la vez, con una serie convergente.

Tma. (Mittag-Leffler). Sea $(b_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{C}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y sean P_n polinomios sin término cte: $P_n(0) = 0$.

Entonces $\exists f$, meromorfa en $\mathbb{C}$, con los polos precisamente en los b_n y con la parte singular (de su serie de Laurent) igual a $P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$. (Como en la suma de la p. anterior)

Además, toda f de este tipo puede escribirse como

$$f(z) = \sum_n \left[P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - Q_n(z)\right] + g(z),$$

(serie infinita, en general)

para ciertos polinomios Q_n y $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Idea de la demostración. $\square$ Caso $b_n \neq 0$, $\forall n$.

La función $P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$ es analítica en $D(0;|b_n|)=\{z: |z|<b_n\}$ y, por tanto, puede representarse como serie de Taylor centrada en el origen. Tomamos como Q_n la suma parcial de dicha serie que nos permite estimar la diferencia

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - Q_n(z)\right| \le K\left(\frac{2|z|}{|b_n|}\right)^{m_n+1},$$

para $|z| \le \frac{|b_n|}{4} \left(< \frac{|b_n|}{2}\right)$. Esto nos permite estimar la suma de los términos a la derecha mediante una serie convergente en todo el plano, salvo en los polos b_n (eligiendo m_n grande). La estimación es uniforme en cada disco. Por el Tma. (básico) de Weierstrass (para los límites uniformes en compactos), el resto de la suma es analítica en cada disco $D(0;R)$, quitando primero de la serie aquellos términos con $|b_n| \le R$.

Se sigue que la serie es meromorfa en $\mathbb{C}$, con la parte singular $P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$ en cada b_n. $\boxtimes$

Ejemplo. Sea $F(z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$, meromorfa con polos dobles en cada $z = n \in \mathbb{Z}$.

Parte singular de la serie de Laurent en $z=0$: $\frac{1}{z^2}$ (polo doble). Para $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sen}^2 \pi(z-n) = \operatorname{sen}^2 \pi z \Rightarrow$ la parte singular en $z=n$ es $\frac{1}{(z-n)^2}$.

La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge si $z \neq n$ (comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$); tb. converge uniformemente en cada $K \subset \mathbb{C}$ si omitimos los términos con $n \in K$. Por eso:

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z),$$

para cierta g entera. Puede demostrarse que $g \equiv 0$, observando que tanto el lado izqdo. como la suma a la dcha. son periódicas con periodo 1. Luego se ve que g está acotada en la banda vertical $\{z = x+iy : 0 \leq x \leq 1\}$ y, por tanto, acotada en $\mathbb{C}$. Por el Tma. de Liouville, $g \equiv$ cte. Finalmente, $g \equiv 0$.

Por consiguiente, $\boxed{\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.}$

Lecturas: Ahlfors, Conway, Rudin.

Solución del problema de interpolación

- Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el resultado deseado para la interpolación de funciones enteras.

Teorema (Guichard). Sean $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones en $\mathbb{C}$, con los z_n distintos dos a dos y $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Entonces $\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ t.q. $f(z_n) = w_n$, $\forall n \geq 0$.

Dem. $\square$ Por el Tma. de factorización de Weierstrass, $\exists g \in H(\mathbb{C})$ y con ceros simples en los z_k: $g(z_k)=0$, $g'(z_k)\neq 0$. Sabemos, de hecho, que

$$g(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}}.$$

Por el Tma. de Mittag-Leffler, $\exists h$, meromorfa en $\mathbb{C}$, con los polos simples en cada z_k y con la parte principal $= \dfrac{w_n}{g'(z_n)(z-z_n)}$ en cada z_n, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{z_n : n\in\mathbb{N}\})$.

Consideremos la función $f=gh$.

Primero, $f\in H(\mathbb{C}\setminus\{z_n : n\in\mathbb{N}\})$. Segundo, debido a la cancelación

$$\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\times\frac{1}{z-z_n} = -\frac{1}{z_n}, \qquad (z_n\neq 0)$$

f tiene una singularidad evitable en cada $z_n\neq 0$. Para $z=0$, la cancelación es: $z\times\frac{1}{z}=1$. Por tanto, f es entera.

Finalmente, en un entorno de cada z_n, tenemos que

$$f(z)=g(z)\,h(z) = \left[g'(z_n)(z-z_n)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_n)}{k!}(z-z_n)^k\right]\times$$

$$\times\left[\frac{w_n}{g'(z_n)(z-z_n)}+r(z)\right].$$

$\longleftarrow$ analítica en un $D(z_n;r)$

$$= w_n + r(z)g'(z_n)(z-z_n) + (z-z_n)\times(\text{fun analítica}).$$

$\longleftarrow$ multiplicando y agrupando los términos

Por tanto, se cumple $(\forall n)$
$f(z_n)=w_n$, QED. $\boxtimes$