(25) M, 11/5/2021

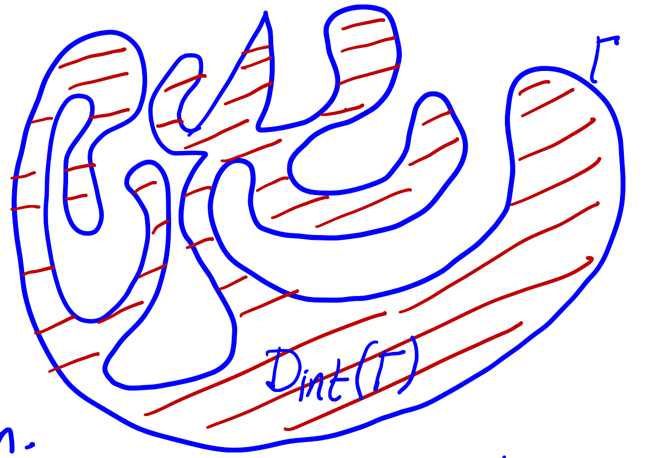
Aplicaciones conformes y espacios de Hardy (continuación)

• Recordemos que, por definición, una curva de Jordan en el plano es una curva homeomorfa a la circunferencia unidad, $\mathbb{T}$. En particular, una curva de Jordan $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ es cerrada ($\gamma(0)=\gamma(1)$) y simple (no tiene autointersecciones: $0\le s<t<1 \Rightarrow \gamma(s)\ne\gamma(t)$).

• El siguiente resultado clásico es muy conocido y se utiliza a menudo pero su demostración no es nada sencilla (véase J.R. Munkres: Topology, 2ª ed., Cap. 10, por ejemplo).

Teorema (Jordan). Si $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ es una curva de Jordan con la traza Γ ($\Gamma=\gamma([0,1])$), entonces $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ tiene dos componentes conexas: una acotada y la otra no acotada. (Ambas componentes son dominios.)

• La componente acotada de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ suele llamarse dominio interior a Γ y la no acotada, dominio exterior. (En el dibujo, el dominio interior, $D_{int}(\Gamma)$, está sombreado en rojo.)

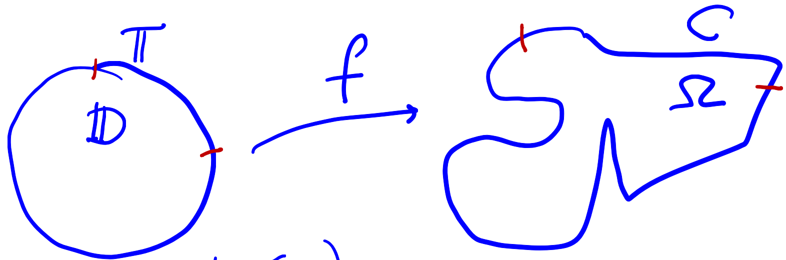


Def'n. Un dominio de Jordan es un dominio acotado por una curva de Jordan.

• El siguiente resultado también es muy conocido y tampoco es sencillo de demostrar.

Teorema de extensión de Carathéodory. (1912-14) Sea Ω un dominio de Jordan, acotado por C (curva de Jordan) y $f:\mathbb{D}\to\Omega$ una aplicación conforme (que existe por el Tma. de Riemann, ya que Ω es simplemente conexo y $\Omega\ne\mathbb{C}$). Entonces f admite una extensión $F:\overline{\mathbb{D}}=\mathbb{D}\cup\mathbb{T}\to\overline{\Omega}=\Omega\cup C$ que es un homeomorfismo.

(Obviamente, $F|_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \to C$ es un homeomorfismo también.)



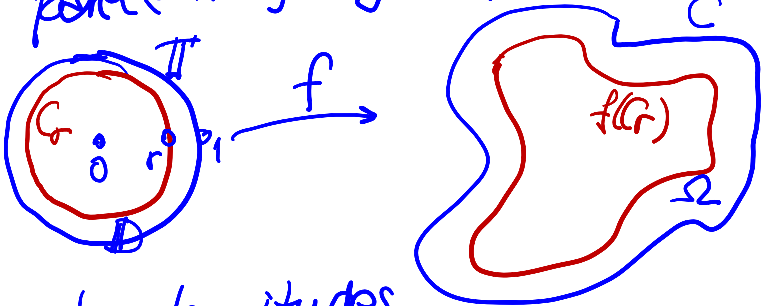
(Distintas demostraciones pueden encontrarse en
W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3ª ed., Cap. 14, Secc. 16-20;
P. Koosis: Introduction to H_p Spaces, 2^{nd} ed., Cap. II, Secc. C.1)

• Una relación importante entre los espacios de Hardy y las aplicaciones conformes viene dada por el siguiente resultado.

Teorema. Sea Ω un dominio de Jordan acotado por $C (= \partial\Omega)$ y $f : \mathbb{D} \to \Omega$ una aplicación conforme (aplicación de Riemann).
Entonces C es rectificable $\Leftrightarrow$ $f' \in H^1$.

• En cierto modo, el resultado parece muy lógico puesto que, si $C_r = \{z : |z| = r\}$, entonces la longitud de $f(C_r)$ es igual a

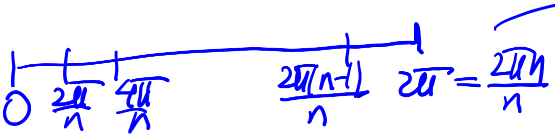
$$r\int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|\, dt.$$

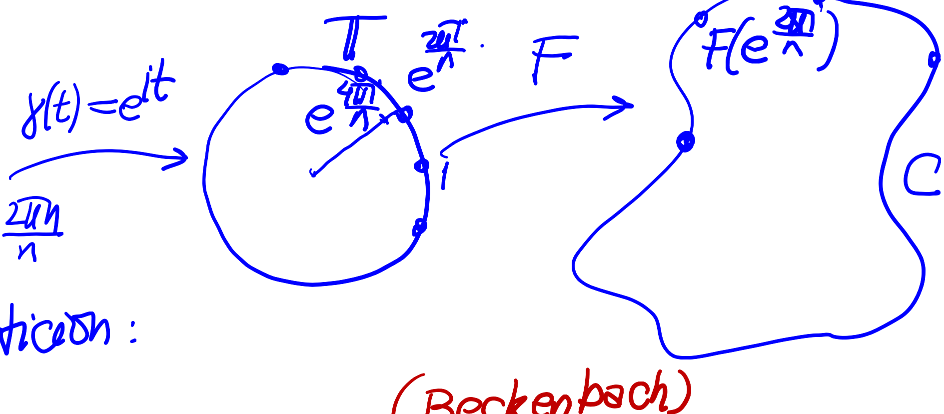


Por tanto, el teorema dice que estas longitudes permanecen acotadas cuando $r \to 1^-$ $\Leftrightarrow$ C tiene longitud finita.

Demostraremos sólo una implicación.

Dem. □ ($\Rightarrow$) Sea $C = \partial\Omega$ rectificable. Según el Teorema de Carathéodory, f tiene una extensión continua, $F : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ tq. $F : \mathbb{T} \to C$.





Consideremos la partición:

(Beckenbach)

$$0=t_0<t_1=\frac{2\pi}{n}<t_2=\frac{4\pi}{n}<\dots<t_{n-1}=\frac{2\pi(n-1)}{n}<t_n=\frac{2\pi n}{n}=2\pi$$

del intervalo $[0,2\pi]$.

Podemos definir la función $S:\overline{\mathbb{D}}\to[0,+\infty)$ como

$$S(z)=\left|F(e^{\frac{2\pi i}{n}}z)-F(z)\right|+\left|F(e^{\frac{4\pi i}{n}}z)-F(e^{\frac{2\pi i}{n}}z)\right|+\dots+\left|F(e^{2\pi i}z)-F(e^{\frac{2\pi(n-1)i}{n}}z)\right|.$$

Cada sumando es una función subarmónica y, por tanto, S lo es (en $\mathbb{D}$). Además, $S\in C(\overline{\mathbb{D}})$ porque F tiene la misma propiedad.

Las funciones subarmónicas también satisfacen el principio del máximo (usando métodos vistos en la clase 11):

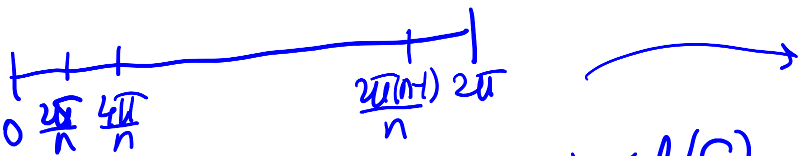
$$\forall z\in\mathbb{D},\quad S(z)\le \max\{S(w): |w|=1\}.$$

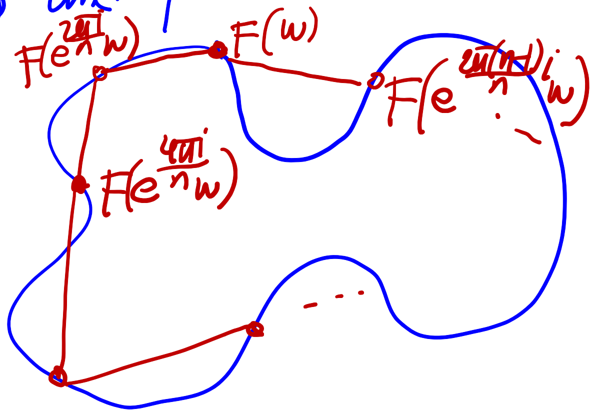
Observemos que, si $|w|=1$, entonces

$$S(w)=\left|F(e^{\frac{2\pi i}{n}}w)-F(w)\right|+\left|F(e^{\frac{4\pi i}{n}}w)-F(e^{\frac{2\pi i}{n}}w)\right|+\dots+\left|F(e^{2\pi i}w)-F(e^{\frac{2\pi(n-1)i}{n}}w)\right|$$

$$\le \text{longitud de } C=\ell(C).$$

puesto que $0,\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\dots,\frac{2\pi(n-1)}{n},2\pi$ es una partición de $[0,2\pi]$.





Por tanto, $\forall r\in(0,1)$, $S(r)\le\ell(C)$.

Si fijamos un $r\in(0,1)$, vemos que

$$S(r)=\sum_{k=1}^{n}\left|F(e^{\frac{2\pi i k}{n}}r)-F(e^{\frac{2\pi i(k-1)}{n}}r)\right| \quad \leftarrow \quad t_k=\frac{2\pi k}{n},\ k=0,1,\dots,n$$

$u(t)=F(e^{it}r)$.

$$\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|u'(t)|\,dt \qquad (\text{longitud de } F(r\mathbb{T})) \qquad u'(t)=ie^{it}rF'(e^{it}r)$$

(usamos la continuidad de u')

$$=\int_0^{2\pi} r\left|F'(re^{it})\right|dt$$

y esta cantidad también tiene que ser $\le\ell(C)$, $\forall r\in(0,1)$.

Por tanto, $\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} r|F'(re^{it})|\,dt\le\ell(C)\Rightarrow F'\in H^1$. ⊠

Observación. $\ell(C)=\lim_{r\to1^-}\ell(f(C_r))=\lim_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}r|F'(re^{it})|\,dt=2\pi\|f'\|_{H^1}$.

Más resultados relacionados:

1) P.L. Duren: Theory of H^p Spaces, Cap. 3, Secc. 4-5 (útiles para ampliar el trabajo sobre las desigualdades de Fejér-Riesz, Hilbert y Hardy)

2) P. Koosis: Introduction to H_p Spaces, Cap. II, Secc. D (también interesante para complementar el mismo trabajo).

Un teorema de Hardy y Littlewood. Desigualdad isoperimétrica

Ya sabemos que, como consecuencia de la definición del espacio de Bergman A^p, se tiene la inclusión $H^p \subseteq A^p$. También sabemos que $A^{2p} \subseteq A^p$, puesto que $2p > p$ y la medida dA es finita. Por tanto, no queda claro si podemos mejorar la inclusión para deducir que $H^p \subseteq A^{2p}$. Sin embargo, esto es cierto y se deduce de un teorema de Hardy y Littlewood de 1932. De hecho, daremos una versión cuantitativa muy precisa (comparando las normas). La idea ya fue desarrollada en un artículo de Carleman de 1923 sobre superficies mínimas pero con ciertas restricciones que no son necesarias (curvas suaves, productos finitos de Blaschke). Los detalles completos pueden encontrarse en trabajos expositivos de autores más contemporáneos.

Teorema. (Carleman, Hardy–Littlewood, ...) $\forall p \in (0,\infty)$, $\forall f \in H(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_{A^{2p}} \le \|f\|_{H^p}.$$

En particular, $H^p \subseteq A^{2p}$.

Dem. $\square$ 1) Primero probaremos el caso $p=2$. Sabemos que, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\mathbb{D}$, entonces

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2, \quad \|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

Observando que $f(z)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) z^n$ (*)

(multiplicación de series de potencias), vemos que

$$\|f\|_{A^4}^4 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)^2|^2 dA(z) = \|f^2\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right|^2}{n+1}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} 1^2\right)}_{=n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2 \quad (\leq \text{ de Cauchy-Schwarz})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^2 = \|f\|_{H^2}^4$$

[Como en (*) pero con $z=1$ y $|a_n|^2$ en lugar de a_n]

$$\Rightarrow \|f\|_{A^4} \leq \|f\|_{H^2}.$$

2) Sea ahora $f \in H^p$ t.q. $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Entonces podemos definir una determinación analítica de $f^{p/2}$ en $\mathbb{D}$ y $f^{p/2} \in H^2$. Por tanto,

$$\|f\|_{A^{2p}}^{2p} = \int_{\mathbb{D}} |f|^{2p} dA = \int_{\mathbb{D}} |f^{p/2}|^4 dA = \|f^{p/2}\|_{A^4}^4$$

$$\overset{\text{Caso 1)}}{\leq} \|f^{p/2}\|_{H^2}^4 = \left(\int_{\mathbb{T}} |f^{p/2}|^2 dm\right)^2 = \|f\|_{H^p}^{2p}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}.$$

3) Finalmente, completando los pasos habituales en la técnica de Riesz, consideramos $f \in H^p$ arbitraria, factorizándola como $f = Bg$, donde B es un producto de Blaschke y $g \in H^p$. Entonces $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Entonces

$$\|f\|_{A^{2p}} = \|Bg\|_{A^{2p}} \leq \|g\|_{A^{2p}} \leq \|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$$

$|B(z)| < 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$ (salvo cuando $B \equiv \lambda$, $|\lambda| = 1$)

y el resultado queda demostrado. $\boxtimes$

Observación. Analizando la prueba, vemos que en el caso 3) con un producto de Blaschke de grado ≥ 1, la igualdad es imposible p.q. la desigualdad $\|Bg\|_{A^{2p}} < \|g\|_{A^{2p}}$ es estricta. Para una f sin ceros en $\mathbb{D}$, la igualdad es posible sólo en el caso 1), si $f^{p/2}$ es una función que satisface la igualdad en el caso 1). Volviendo al caso 1), la igualdad en Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k a_{n-k}|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k a_{n-k}|^2\right)$$

es posible sólo si $\forall n \geq 0\ \exists C_n$ t.q. $a_k a_{n-k} = C_n$ (para $n \in \{0,1\}$ se cumple la igualdad trivialmente).

Si $a_0 = 0$, se sigue que $a_0 a_{2n} = \dots = a_n^2 = C_n$ que $a_n = 0$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow f \equiv 0$ (caso trivial, de poco interés).

Si $a_0 \neq 0$, escribiendo $\lambda = \frac{a_1}{a_0}$, obtenemos:

$$a_0 a_n = a_1 a_{n-1} = a_2 a_{n-2} = \dots = C_n$$

$\Rightarrow$ $a_n = \lambda a_{n-1}$ y así $\forall n \geq 1$. Por tanto, las únicas funciones extremales en el caso 1) cumplen $a_n = \lambda^n a_0$, luego

$$f_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n z^n = \frac{a_0}{1-\lambda z}$$ (Convergente en $\mathbb{D}$ si $|\lambda|<1$)

y, en el caso 2), $(f_\lambda(z))^{p/2} = \frac{a_0}{1-\lambda z} \Rightarrow f_\lambda(z) = \left(\frac{a_0}{1-\lambda z}\right)^{2/p} = \frac{C}{(1-\lambda z)^{2/p}}$,

$C = cte$, $|\lambda| < 1$.

- Como corolario, podemos deducir un resultado muy clásico.

Teorema. (Desigualdad Isoperimétrica). Sea Ω un dominio de Jordan de área A, acotado por una curva rectificable ($\partial\Omega$)

de longitud L. Entonces $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$, con igualdad si y sólo si Ω es un disco.

(Dicho de otra manera: de entre todas las curvas de Jordan de longitud prescrita, la que mayor área encierra, es una circunferencia.)

<u>Dem.</u> $\square$ Sea $F: \mathbb{D} \to \Omega$ una aplicación conforme, con $F(\mathbb{D}) = \Omega$ (aplicación de Riemann). Entonces

$$L = \ell(\partial\Omega) = \lim_{r\to 1^-} \ell(f(C_r)) = \lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} |F'(re^{it})| r\, dt = 2\pi \|F'\|_{H^1}.$$

Por otra parte,

$$A = \text{área}(\Omega) = \pi \int_\Omega dA(z) = \pi \int_{\mathbb{D}} |F'(z)|^2 dA(z)$$

medida del área normalizada $= \frac{1}{\pi} dx\, dy$

$$= \pi \|F'\|^2_{A^2} \leq \pi \|F'\|^2_{H^1} \leq \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}, \text{ QED.}$$

(<u>Tma. anterior</u>)

Hemos aplicado el caso $p=1$ del Tma. La igualdad es posible sólo si $F'(z) = \frac{C}{(1-\lambda z)^2}$, $C = $ cte, $|\lambda| < 1$.

Esto es $\Leftrightarrow F = \frac{B}{1-\lambda z} + D$, una transformación de Möbius.

Pero entonces $\Omega = F(\mathbb{D}) = $ un disco. $\boxtimes$

<u>De vuelta a las funciones subarmónicas</u>

En la <u>clase 11</u> indicamos que la función $\log|f|$ es subarmónica en el disco unidad $\mathbb{D}$ y que eso se demostrará más adelante. Completaremos ahora este detalle olvidado, usando un resultado probado en la <u>clase 13</u>:

Si $f \in H(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$ y consideremos

$$M_r(f) = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{it})|\, dm(t),$$

entonces
$$0<r<s<1 \Rightarrow M_r(f) \le M_s(f)$$

y
$$\log|f(0)| = \lim_{r\to 0^+} M_r(f).$$

Esta propiedad implica la desigualdad del valor medio para los discos centrados en $a=0$, $D(0;R) \in \mathbb{D}$, $0<R<1$:

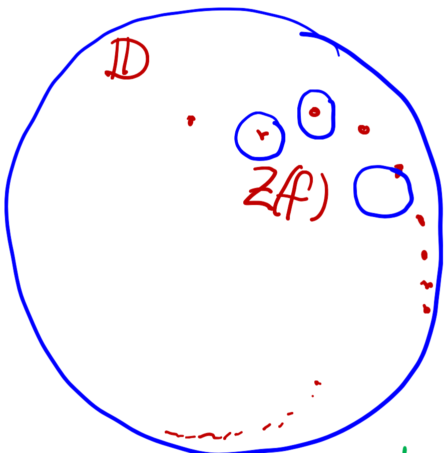
$$\log|f(0)| \le M_R(f) = \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{it})| \frac{dt}{2\pi}, \quad 0<R<1.$$

Para otros discos $D(a;R) \subset \mathbb{D}$, en lugar de $\log|f(z)|$, podemos considerar la función $g(z) = \log|f(z+a)|$ y aplicar a ella la desigualdad anterior, observando que $g \in H(\mathbb{D})$, donde $g(z) = f(z+a)$.

• Por supuesto, también se puede aplicar el siguiente resultado: Para $f \in C^2(\Omega)$, Ω dominio, f es subarmónica $\Leftrightarrow \Delta f \ge 0$ en Ω.

El problema es que esto sólo nos dará la subarmonicidad de $\log|f|$ en $\mathbb{D} \setminus Z(f)$, donde $Z(f) = \{a \in \mathbb{D} : f(a) = 0\}$ y tendríamos que trabajar más para ver que $\log|f|$ es subarmónica en todo $\mathbb{D}$.

(Habrá que considerar la desigualdad del valor medio para las circunferencias que contienen algunos ceros de f o que los rodean, etc.)



Las demás propiedades de $\log|f|$: $-\infty \le \log|f| < \infty$, $\log|f|$ semicontinua superiormente en $\mathbb{D}$, etc. son obvias.