23 M, 4/5/2021

CEROS DE FUNCIONES EN LOS ESPACIOS DE BERGMAN

Empezaremos con algunas observaciones.

Para $z\in\mathbb{D}$, escribiremos $r=|z|$. Sabemos del otro día que

$$f\in A^p \Rightarrow \exists C(=\|f\|_p) \text{ t.q. } |f(z)|\leq \frac{C}{(1-r)^{2/p}}, \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

Dicho de otra manera (para $M_\infty(r;f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$):

$$f\in A^p \Rightarrow M_\infty(r;f)=O\left(\frac{1}{(1-r)^{2/p}}\right), \quad r\to 1^- \qquad (*)$$

De hecho, es cierto $M_\infty(r;f)=o\left(\frac{1}{(1-r)^{2/p}}\right), r\to 1^-$ (Hoja 3).

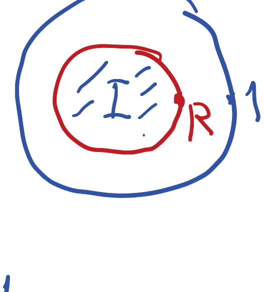
El recíproco de $(*)$ es falso pero se satisface una condición "cercana":

$$\exists a<\tfrac{1}{p} \text{ t.q. } M_\infty(r;f)=O\left(\frac{1}{(1-r)^{a}}\right), \ r\to 1^- \Rightarrow f\in A^p.$$

En efecto, si $|f(z)|\leq\frac{C}{(1-r)^a}$, para $|z|=r\in(R,1)$, $0<R<1$,

entonces

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p dA(z)=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R|f(re^{it})|^p r\,dr\,dt}_{\text{cantidad finita, fija}, I}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_R^1|f(re^{it})|^p r\,dr\,dt$$



$$\leq I+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_R^1\frac{C}{(1-r)^{pa}}r\,dr\,dt$$

$$=I+2C\int_R^1\frac{r\,dr}{(1-r)^{pa}}<\infty, \quad \text{p.q. } pa<1.$$

- Primero compararemos los ceros de una función $f\in A^p$ con las sucesiones de Blaschke. Como siempre, las únicas funciones de interés son aquellas que tienen infinitos ceros en $\mathbb{D}$. Como siempre, podemos suponer que $f(0)\neq 0$ y ordenar los ceros de menor a mayor en módulo: $0<|z_1|\le|z_2|\le|z_3|\le\dots<1$, repitiendo cada cero según su multiplicidad.

Sea $n(r)=|\{z_k : |z_k|<r\}|$ (contando las multiplicidades).

Como observación preliminar, las sucesiones de Blaschke cumplen la condición $n(r)=O\left(\frac{1}{1-r}\right)$. En efecto,

$$(1-r)\,n(r)\le\sum_{|z_k|<r}(1-|z_k|)<\infty \qquad (\text{ya que } |z_k|<r\Rightarrow 1-r<1-|z_k|)$$

Los ceros de las funciones A^p cumplen una condición similar pero más débil:

<u>Proposición.</u> Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, con $f(0)\neq0$ y supongamos que $M_\infty(r;f)=O\left(\frac{1}{(1-r)^a}\right)$, $r\to1^-$, para cierto $a>0$. Entonces los ceros $(z_k)_{k=1}^\infty$ de f tienen las siguientes propiedades:

(a) $n(r)=O\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\right)$, $r\to1^-$;

(b) $\sum_{k=1}^\infty(1-|z_k|)\left(\log\frac{1}{1-|z_k|}\right)^{-1-\varepsilon}<\infty$, $\forall\varepsilon>0$.

(Obsérvese que $n(r)=O\left(\frac{1}{1-r}\right)\Rightarrow$ (a) y que tb. la condición de Blaschke $\Rightarrow$ (b), ya que (C.Bl.) $\Rightarrow 1-|z_k|\to0^+\Rightarrow\log\frac{1}{1-|z_k|}\to\infty\Rightarrow$ $\left(\log\frac{1}{1-|z_k|}\right)^{-1-\varepsilon}\to0$, $k\to\infty$.)

<u>Dem.</u> $\square$ En ambos apartados, necesitaremos la fórmula de Jensen (clase 12):
$$\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dm(t)=\log|f(0)|+\sum_{|z_k|<r}\log\frac{r}{|z_k|}.$$

Las condiciones (i), (ii) no cambian si multiplicamos f por una constante, así que podemos suponer que $f(0)=1$, sin pérdida de generalidad. Además, según un ejercicio de la hoja 2 (y tb.

de la hoja 3) podemos escribir la fórmula en la forma

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{it})|\,dm(t) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt .$$

(a) Por la hipótesis acerca de f, obtenemos

$$\int_0^r n(t)\,dt \le \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{it})|\,dm(t) \overset{\text{por hipótesis sobre } f}{\le} C\log\frac{1}{1-r} .$$

Puesto que $n(t)\nearrow$, se sigue que

$$(r-r^2)\,n(r^2) = \int_{r^2}^r n(r^2)\,dt \le \int_{r^2}^r n(t)\,dt \le C\log\frac{1}{1-r}$$

$$\Rightarrow n(r^2) \le \frac{C}{r}\,\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r} \approx C\,\frac{1}{1-r^2}\log\frac{1}{1-r^2},\quad r\to 1.$$

Sustituyendo r en lugar de r^2, (a) se sigue.

(b) Partimos de nuevo de la estimación vista antes:

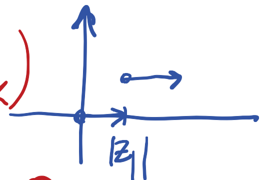
$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt \le C\log\frac{1}{1-r} .$$

Recordamos una fórmula (Clase 18) para la integral de R-S. cuando el integrador es una función escalonada como $n(t)$:

$$\int_0^1 u(t)\,dn(t) = \sum_{k=1}^{n} u(c_k)\,[n(c_k^+)-n(c_k^-)],$$

donde los saltos de n se producen en los puntos c_k pero no en 0 ni en 1. La fórmula se extiende fácilmente a un número numerable de puntos de discontinuidad: $c_k=|z_k|$, obteniendo

$$\int_0^1 u(r)\,dn(r) = \sum_{k=1}^{\infty} u(|z_k|)\underbrace{[n(|z_k|)-n(|z_{k-1}|)]}_{\text{si } |z_{k-1}|\ne|z_k|}\ (\text{mult. de } z_k)$$



si $|z_{k-1}|=|z_k|$, es $=0$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u(|z_k|) \leftarrow \text{(así contamos las multiplicidades)}$$

Tomando

$$u(r) = (1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon},$$

obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)\left(\log\frac{1}{1-|z_k|}\right)^{-1-\varepsilon} = \int_0^1 (1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon} dn(r)$$

(integrando por partes)

$$= (1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon} n(r)\Big|_0^1 - \int_0^1 n(r)\,\frac{d}{dr}\left[(1-r)\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon}\right]dr$$

$$= \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon} + \cancel{(1-r)}(1+\varepsilon)\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-2-\varepsilon}\cancel{\frac{1}{1-r}}\right] n(r)\,dr$$

$$= \int_0^1 \left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon}\left[\underbrace{r+(1+\varepsilon)r\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1}}_{\text{fcn acotada}}\right]\frac{n(r)}{r}\,dr$$

$$\leq K\int_0^1\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon}\frac{n(r)}{r}\,dr = K\int_0^1\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon} dN(r)$$

$$= \underbrace{K\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon} N(r)\Big|_0^1}_{=0\text{, pq. } \frac{N(r)}{\log\frac{1}{1-r}}\leq C,\ r\to 1^-} + K(1+\varepsilon)\int_0^1 \frac{1}{1-r}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-2-\varepsilon} N(r)\,dr$$

$n(r)=0,\ \forall r\in[0,|z_1|)$
$\Rightarrow N(r)=0,\ \forall r\in[0,|z_1|)$

$$\leq K(1+\varepsilon)C\int_{|z_1|}^1 \frac{1}{1-r}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1-\varepsilon} dr$$

$\log\frac{1}{1-r}=t;\ \frac{1}{1-r}=e^t$
$r=1-e^{-t};\ dr=e^{-t}dt$

$$= K(1+\varepsilon)C\int_{\log\frac{1}{1-|z_1|}}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}<\infty.$$

$\boxtimes$

- Puesto que las estimaciones (a) y (b) se obtienen para toda $f\in H(\mathbb{D})$ con $M_\infty(r;f)=O\left(\frac{1}{(1-r)^a}\right)$ para algún $a>0$, se tienen en particular para todas las funciones $f\in A^p$, $\forall p>0$.
- H. Shapiro y A. Shields (1962) demostraron (mediante un ejemplo) que la "O" no se puede sustituir por la "o" en (a).
- Por otra parte, sabemos que si $(z_k)_k$ es una sucesión de Blaschke, entonces $\exists f\in H^p$ precisamente con los ceros en z_k (y con las multiplicidades prescritas). También sabemos que entonces $f\in A^p$. Por tanto, toda sucesión de Blaschke es un conjunto de ceros para A^p, $0<p<\infty$. (Por def'n, un conjunto de

ceros para A^p es un conjunto $\{z_k\}_k$ t.q. $\exists f\in A^p$, $f\not\equiv 0$, que se anula precisamente en los puntos $\{z_k\}$ con las multiplicidades prescritas.)

Sin embargo, veremos que $\forall p\in(0,\infty)$ $\exists$ un conjunto de ceros para A^p que no es una sucesión de Blaschke. Veamos primero un lema.

Lema Sea $F:[0,1)\to\mathbb{R}$ una función continua y creciente t.q. $F(0)=1$ y $\lim_{r\to 1^-} F(r)=\infty$. Entonces existe una sucesión (n_k) de números naturales t.q. $\sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k}\le F(r)$, $\forall r\in[0,1)$.

Dem. $\square$ Sea $r_0=0$ y $r_k\in(0,1)$ t.q. $F(r_k)=k+1$. Entonces $r_0<r_1<r_2<\dots<1$. Sea $n_1\in\mathbb{N}$ t.q. $r_1^{n_1}\le\frac{1}{2}$. Definamos la sucesión (n_k) por inducción: dado n_{k-1}, sea n_k t.q. $n_k>n_{k-1}$ y $r_k^{n_k}\le\frac{1}{2^k}$.

Dado $r\in(0,1)$, $\exists s\in\mathbb{N}$ t.q. $r_{s-1}\le r<r_s$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k}\le\sum_{k=1}^{\infty} r_s^{n_k}=\sum_{k=1}^{s-1} r_s^{n_k}+\sum_{k=s}^{\infty} r_s^{n_k}$$

$$\le(s-1)+\sum_{k=s}^{\infty} r_k^{n_k}\qquad (k\ge s\Rightarrow r_k\ge r_s)$$

$$\le(s-1)+\sum_{k=s}^{\infty}\frac{1}{2^k}=(s-1)+\frac{1}{2^s}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right)}_{\le 2}$$

$$=(s-1)+2^{1-s}\le(s-1)+1=s\qquad (s\ge 1)$$

$$=F(r_{s-1})\le F(r).\qquad\boxtimes$$

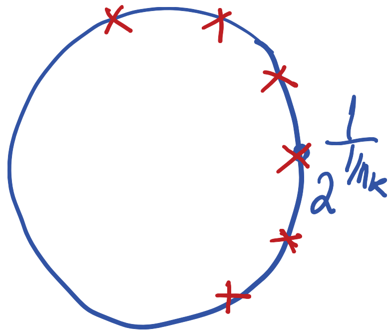
Ejemplo. Dado $p\in(0,\infty)$, $\exists f\in A^p$ cuyo conjunto de ceros no es una sucesión de Blaschke.

$\square$ Sean $(n_k)_k$ números naturales, $n_k\nearrow$. Consideremos el producto infinito

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-2z^{n_k}\right),\quad z\in\mathbb{D}.$$

Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} 2|z|^{n_k}$ converge uniformemente en cada $K\Subset\mathbb{D}$

(comparación con una serie geométrica: $|z|\le r \Rightarrow$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|z|^{n_k}\le\sum_{k=1}^{\infty}r^{n_k}\le\sum_{k=1}^{\infty}r^{k}\Big),$$
por un teorema visto en la clase 14, el producto infinito que define f converge uniformemente en cada $K\subset\subset\mathbb{D}$ (por tanto, $f\in H(\mathbb{D})$) y, además, los ceros de f son precisamente los puntos $z=\sqrt[n_k]{1/2}$. Son n_k valores distribuidos de forma simétrica en la circunferencia $\left\{z:\ |z|=\frac{1}{2^{1/n_k}}\right\}$.



La suma de Blaschke correspondiente es
$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k\cdot\left(1-\frac{1}{2^{1/n_k}}\right)=\infty,$$
p.q.
$$\lim_{k\to\infty} n_k\left(1-\frac{1}{2^{1/n_k}}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{1/m}}}{\frac{1}{m}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-2^{-x}}{x}\quad (\text{L'Hôpital})$$
$$=\lim_{x\to0^+}2^{-x}\log 2=\log 2\neq 0.$$
Sin embargo,
$$|f(z)|\le\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+2r^{n_k}\right)\underset{1+t\le e^t}{\le} e^{2\sum_{k=1}^{\infty}r^{n}}\le e^{2F(r)},$$
para toda $F:[0,1)\to\mathbb{R}$ continua y creciente, con $F(0)=1$ y $\lim_{r\to1^-}F(r)=\infty$, por el Lema probado, eligiendo los n_k suficientemente grandes. En particular, podemos conseguirlo para
$$e^{2F(r)}=\frac{e^2}{(1-r)^a},$$
con $0<a<\frac{1}{p}$, de manera que $f\in A^p$. ☐

• Sabemos que los conjuntos de ceros de los espacios H^p son precisamente las sucesiones de Blaschke y, por tanto, no dependen de p.

Así mismo, si $\{z_k\}$ es un conjunto así y $\{w_k\}\subseteq\{z_k\}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|w_k|)\le\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty$. De aquí se sigue que un subconjunto de un conjunto de ceros para H^p también es un conjunto de ceros para H^p. De manera similar, si

$$\sum_k (1-|z_k|)<\infty, \quad \sum_k (1-|w_k|)<\infty,$$

entonces $\sum_k (1-|z_k|)+\sum_k (1-|w_k|)<\infty$, así que la unión de dos conjuntos de ceros para H^p es otro conjunto de ceros.

- En 1974, Ch. Horowitz examinó si estas afirmaciones se cumplen o no para los conjuntos de ceros de A^p, llegando a las siguientes conclusiones.

Tma. (Horowitz, 1974). (a) Si $0<p<q<\infty$, entonces existe un conjunto de ceros para A^p que no lo es para A^q.

(b) Si $0<p<\infty$, entonces todo subconjunto de un conjunto de ceros para A^p es un conjunto de ceros para A^p.

(c) Si $0<p<\infty$, entonces la unión de dos conjuntos de ceros para A^p es un conjunto de ceros para $A^{p/2}$ pero, en general, no lo es para A^q con $q>\frac{p}{2}$.

Las demostraciones de estos resultados son relativamente largas y técnicas porque son todas constructivas. Por ejemplo, para probar (a), Horowitz considera productos de la forma

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-b z^{m^j}\right), \quad b>1, \ m=2,3,\dots,$$

eligiendo b y m de manera que $f\in A^p$ pero su conjunto de ceros incumple la condición necesaria que ha de cumplir un conjunto de ceros para A^q (que veremos a continuación).

La manera de comprobar que $f\in A^p$ es controlando el crecimiento de las sumas $\sum_{k=0}^{n}|a_k|^r$, donde $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$.

El apartado (a) tiene una consecuencia que contesta con los espacios de Hardy.

<u>Corolario</u>. $\exists f\in A^1$ que no puede factorizarse como $f=gh$, con $g,h\in A^2$ y $h(z)\neq 0$, $\forall z\in \mathbb{D}$.

Existen otros resultados relacionados de Luecking (1996) y Duren, Schuster y Seip (2000) pero no existe ninguna descripción de tipo "si y sólo si" de los conjuntos de ceros de A^p.

Curiosamente, para la unión

$$\bigcup_{0<p<\infty} A^p = \{f : \exists \alpha \text{ t.q. } \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)| < \infty\}$$

(este hecho se sigue de las observaciones anteriores sobre el crecimiento de $M_\infty(r,f)$ y la pertenencia de f a algún A^p) sí existe la descripción de los conjuntos de ceros. Puede encontrarse en un trabajo profundo de Korenblum (1975).

- Finalizamos esta exposición con la condición necesaria prometida.

<u>Teorema (Horowitz, 1974)</u>. Sea $f\in A^p$ con $f(0)\neq 0$ y los ceros $(z_k)_k$ ordenados: $0<|z_1|\leq|z_2|\leq\dots<1$. Entonces

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k|} = O(n^{\frac{1}{p}}),\quad n\to\infty.$$

- El exponente $\frac{1}{p}$ es óptimo pero la condición está lejos de ser suficiente, incluso cuando todos los z_k están en un radio (ejemplo de Shapiro–Shields).

(clase 12)

<u>Dem.</u> □ Por la fórmula de Jensen,

$$\log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log\frac{r}{|z_k|} = \int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dm(t),$$

donde $0<|z_1|\leq|z_2|\leq\dots\leq|z_n|<r\leq|z_{n+1}|\leq\dots$

Multiplicando por p y aplicando la función exponencial, obtenemos

$$|f(0)|^p \prod_{k=1}^{n} \frac{r^p}{|z_k|^p} = e^{p\log|f(0)| + p\sum_{k=1}^{n} \log\frac{r}{|z_k|}}$$

$$= e^{\int_0^{2\pi} \log|f(re^{it})|^p dm(t)}$$

Clase 11: (desigualdad aritmético-geométrica)

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dm(t).$$

$$\begin{cases} |z_k|<r \Rightarrow \left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p > 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p \nearrow \text{ cuando } m\nearrow \text{ y } 1\leq m\leq n. \\ |z_k|>r \Rightarrow \left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p \downarrow \text{ cuando } m\nearrow \text{ y } m>n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |f(0)|^p \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p \leq |f(0)|^p \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dm(t),$$

$\forall m\in\mathbb{N}$ y para n t.q. $|z_k|<r\leq|z_{k+1}|$.

Por tanto, se tiene que $\forall r\in[0,1)$ y $\forall n\in\mathbb{N}$

$$|f(0)|^p \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)^p \leq M_p^p(r;f).$$

Integrando respecto a $2r\,dr$, obtenemos

$$2|f(0)|^p \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k|^p} \cdot \int_0^1 r^{np+1}dr \leq 2\int_0^1 M_p^p(r;f)\,r\,dr = \|f\|_{A^p}^p$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2}{np+2}\right)^{\frac{1}{p}} |f(0)| \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k|} \leq \|f\|_{A^p}$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k|} = O(n^{\frac{1}{p}}),\ n\to\infty, \text{ si } f\in A^p. \quad \boxtimes$$

- Nos limitamos a esta exposición de sólo algunos hechos basicos, debido a la falta de tiempo.

Las referencias de Hedenmalm, Korenblum, Zhu y Duren, Schuster contienen mucha más información.

• Conviene comentar que, si B es un producto de Blaschke cuyos ceros son todos ceros de $f \in A^p$, ya no es cierto que $\|\frac{f}{B}\|_{A^p} = \|f\|_{A^p}$, ni siquiera que $\|\frac{f}{B}\|_{A^p} \leq C\|f\|_{A^p}$ ($\frac{f}{B} \notin A^p$ es posible).

Sin embargo, a principios de los años 1990 se construyeron los divisores canónicos de ceros: dado un conjunto de ceros, $(z_k)_k$, para A^p, existe $G \in A^p$ que se anula precisamente en los (z_k) y para toda $f \in A^p$ que se anula allí (y, posiblemente, en más puntos),

$$\|\frac{f}{G}\|_{A^p} \leq \|f\|_{A^p}.$$

• $p = 2$: H. Hedenmalm (1991).
• $p \geq 1$: Duren-Khavinson-Shapiro-Sundberg (1993).