 J, 29/04/2021

- Definimos $P_+ u(z) = \int_0^{2\pi} \frac{u^*(e^{it})}{1 - e^{-it} z}\, dm(t)$, para $u \in h^1$.

Visto en la última clase:

(Conj. armónica)

$P_+ : h^p \to H^p$ acotado $\Longleftrightarrow$ $C : h^p \to h^p$, $Cu = \tilde{u}$ es acotado $(\tilde{u}(0) = 0)$

$(L^p(\mathbb{T}) \to H^p)$

Tma. (M. Riesz, 1920). Sea $1 < p < \infty$. Si $u \in h^p$, entonces $\tilde{u} \in h^p$ y, además, $\exists A_p > 0$ t.q. $\forall u \in h^p$ $\forall r \in [0,1)$ $M_p(r, \tilde{u}) \le A_p M_p(r, u)$.

Por tanto, $P_+ : h^p \to H^p$ es acotado $\forall p \in (1, \infty)$.

Tma. Considerando $P_+ : L^p(\mathbb{T}) \to H^p$, se tiene que $\|P_+\| = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p}}$.

- $\|P_+\| \ge \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p}}$ (Gohberg–Krupnik, 1958)
- $\|P_+\| \le \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p}}$ (Hollenbeck–Verbitsky, 2000).

- Obsérvese que, para $p = 2$, $\|P_+\| = 1$ (como para toda proyección ortogonal).

Tma. (Kolmogórov, 1925). $u \in h^1 \Rightarrow \tilde{u} \in \bigcap_{0<p<1} h^p$. De hecho, $\forall p \in (0,1)$ $\exists B_p > 0$ t.q. $\forall u \in h^1$ $\forall r \in [0,1)$ $M_p(r, \tilde{u}) \le B_p M_1(r, u)$.

ESPACIOS DE BERGMAN: Rudimentos

Monografías recomendadas:

- H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu: Theory of Bergman Spaces, Springer, 2000.
- P. Duren, A. Schuster: Bergman Spaces, AMS, 2004.

Notación: $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx\,dy = \frac{1}{\pi} r\,dr\,dt$; medida del área en $\mathbb{D}$ (normalizada).

$z = x + yi = re^{it} \in \mathbb{D}$

Advertencia: [DS] utiliza dA para la medida del área en un dominio arbitrario y $d\sigma$ para la normalizada en $\mathbb{D}$.

$$A(\mathbb{D}) = \int_{\mathbb{D}} dA(z) = 1 \quad \text{(en lugar de } \pi\text{)}.$$

$$L^p(\mathbb{D}, dA) = \left\{ f : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) < \infty \right\}; \quad \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Def'n. El espacio de Bergman es

$$A^p (= L^p_a) \stackrel{\text{def'n}}{=} L^p(\mathbb{D}, dA) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$$
$$= \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_{A^p} = \|f\|_p < \infty \right\}$$

Obs'n. $$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(x+yi)|^p dx\,dy = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\, r\,dr$$

$$= 2 \int_0^1 r\, M_p^p(r, f)\, dr. \qquad \left(M_p^p(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)$$

Por tanto, $f \in H^p \Rightarrow M_p(r; f) \le \|f\|_{H^p}$, $\forall r \in [0,1)$

$$\Rightarrow \|f\|_{A^p}^p \le 2 \int_0^1 r \|f\|_{H^p}^p dr = \|f\|_{H^p}^p \Rightarrow \|f\|_{A^p} \le \|f\|_{H^p}.$$

En particular, $\forall p \in (0, \infty)$, $H^p \subseteq A^p$.

Propiedades básicas. • $\|f\|_{A^p}$ define una norma, si $1 \le p < \infty$.

• Cuando $0 < p < 1$, no es una norma pero $d_p(f,g) = \|f - g\|_{A^p}^p$ define una métrica invariante por traslaciones: $d_p(f-h, g-h) = d_p(f,g)$.

• $p = 2$: Podemos definir el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)}\, dA(z),$$

compatible con la norma: $4\langle f,g\rangle = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 + \|f+ig\|^2 + \|f-ig\|^2$.

Podemos escribir $\langle f,g\rangle$ y $\|f\|$ en términos de los coeficientes de Taylor de f,g:

Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ en $\mathbb{D}$, entonces

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{imt}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{int}\right) dt\, r\,dr$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_m\overline{b_n}}{\pi}\int_0^1 r^{m+n+1}\,dr\cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\,dt}_{=\begin{cases}0, & si\ m\neq n\\ 2\pi, & si\ m=n\end{cases}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n\overline{b_n}\int_0^1 r^{2n+1}\,dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{n+1}.$$

Argumento riguroso: Primero integramos sobre $\int_0^R$, $0<R<1$. La serie converge uniformemente en $\{z:|z|\le R\}=\{(r,t): 0\le t\le 2\pi,\ 0\le r\le R\}$ $\Rightarrow$ $\int_0^R\int_0^{2\pi}\sum_m\sum_n = \sum_m\sum_n\int_0^R\int_0^{2\pi}$. Después tomamos $\lim_{R\to 1^-}$.

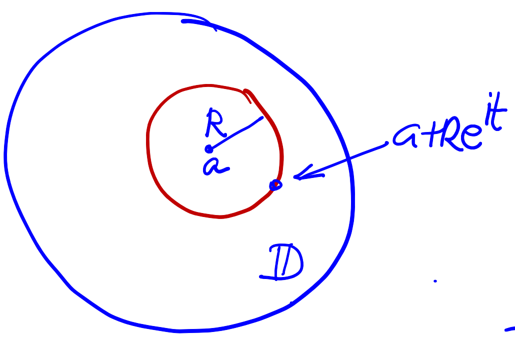
Por tanto,

$$\boxed{\|f\|_{A^2}^2 = \langle f,f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}.}$$

(Obviamente, esto también demuestra que $\|f\|_{A^2}\le\|f\|_{H^2}$.)

- La colección $\{\sqrt{n+1}\,z^n : n\in\{0,1,2,\dots\}\}$ es una base ortonormal para A^2.

Evaluaciones puntuales. Completitud de A^p



Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $a\in\mathbb{D}$ y $R>0$ t.q. $\overline{D}(a;R)\subseteq\mathbb{D}$. Puesto que $f\in h(\mathbb{D})$, la propiedad del valor medio nos dice que

$$f(a)=\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,\frac{dt}{2\pi}$$

$$\Rightarrow R^2 f(a) = 2\int_0^R r\,dr\cdot f(a) \overset{PVM}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^R r\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt\,dr$$

(coordenadas polares) $\longrightarrow$ $$= \int_{D(a,R)} f(z)\,dA(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a) = \frac{1}{R^2}\int_{D(a;R)} f(z)\,dA(z)}$$ (Versión de la PVM para la integral del área)

Recordando que $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $0<p<\infty \Rightarrow |f|^p$ es subarmónica en $\mathbb{D}$, por la desigualdad del valor medio, obtenemos

$$|f(a)|^p \le \int_0^{2\pi} |f(a+Re^{it})|^p \frac{dt}{2\pi} \Rightarrow$$

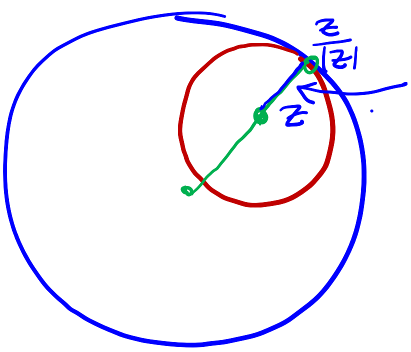
$$R^2|f(a)|^p \le 2\int_0^R r\,dr\,|f(a)|^p \le \frac{1}{\pi}\int_0^R r\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^p\,dt\,dr$$

$$= \int_{D(a;R)} |f(z)|^p\,dA(z)$$ (coordenadas polares)

$$\Rightarrow \boxed{|f(a)|^p \le \frac{1}{R^2}\int_{D(a;R)} |f(z)|^p\,dA(z)}$$ (Desigualdad del valor medio $=$DVM)

Esto sigue siendo cierto incluso cuando $D(a,R)\subseteq\mathbb{D}$ (en lugar de $\overline{D(a;R)}\subseteq\mathbb{D}$), ya que $\forall r<R$ $\overline{D}(a;r)\subseteq\mathbb{D}$.

- Si suponemos ahora que $f\in A^p$ y $z\in\mathbb{D}$, tomando $R=1-|z|$ y observando que $D(z;1-|z|)\subseteq\mathbb{D}$, la (DVM) nos da



$$(1-|z|)^2|f(z)|^p \le \int_{D(z;1-|z|)} |f|^p\,dA \le \int_{\mathbb{D}} |f|^p\,dA$$

$$\Rightarrow \boxed{|f(z)| \le \frac{\|f\|_{A^p}}{(1-|z|)^{2/p}}}.$$

Esto nos permite hacer estimaciones en compactos, como antes: $K \Subset \mathbb{D} \Rightarrow \exists R \in (0,1)$ t.q. $\forall z \in K$, $|z| \leq R \Rightarrow$

$$\forall z \in K, \quad |f(z)| \leq \frac{\|f\|_{A^p}}{(1-R)^{2/p}}.$$

Por tanto:
- La bola unidad de A^p es una familia normal.
- $f_n \to f$ en $A^p \Rightarrow \forall K \Subset \mathbb{D}$, $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$.
- A^p es completo, al igual que H^p.

Prop.
- Cuando $1 \leq p < \infty$, A^p es un espacio de Banach resp. a la norma $\|\cdot\|_{A^p}$.
- A^2 es Hilbert.
- Cuando $0 < p < 1$, A^p es un espacio métrico completo resp. a la métrica dada por $d_p(f,g) = \|f-g\|_{A^p}^p$.
- $0 < p < q < \infty \Rightarrow A^q \subseteq A^p$.
- $A^\infty = H^\infty$; es fácil ver, usando que $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$, $\forall z \in \mathbb{D}$, que $\lim_{p \to \infty} \|f\|_{A^p} = \|f\|_{H^\infty}$.

- Una diferencia importante en relación con los espacios de Hardy: en general, las funciones en A^p no tienen límites radiales.

Ejemplo. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ (es un ejemplo de serie lagunar) f no tiene límites radiales en casi ningún punto de $\mathbb{T}$ (Referencia: A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press).

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 2^n \\ 0, & \text{si } k \neq 2^n \end{cases} \Rightarrow \|f\|_{A^2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} < \infty \Rightarrow f \in A^2.$$

Puede verse que $f \in \bigcap_{0<p<\infty} A^p$ (S. Buckley, P. Koskela, D.V., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1999)

Por tanto, en A^p no tenemos la factorización de Riesz/Kolmogorov. De hecho, los conjuntos de ceros cambian con p. Esto hace que la teoría de los espacios A^p sea más complicada que la de los H^p.

Núcleo reproductor de Bergman

Para $a \in \mathbb{D}$, sea $\Lambda_a : A^2 \to \mathbb{C}$ el funcional de evaluación puntual: $\Lambda_a f = f(a)$, para $f \in A^2$. Por la estimación $|f(a)| \le \frac{\|f\|_{A^2}}{1-|a|}$ vista antes, sabemos que Λ_a (que es un funcional lineal) es acotado. Por el Tma. de Riesz, $\exists K_a \in A^2$ t.q.

$$\forall f \in A^2, \quad \Lambda_a f = f(a) = \langle f, K_a \rangle .$$

Def'n. K_a = núcleo reproductor para A^2 = núcleo de Bergman.

• La teoría de los núcleos reproductores en $A^2(\Omega)$ (Ω dominio en $\mathbb{C}$) fue desarrollada a partir de los años 1920 por S. Bergman pero el estudio de los espacios A^p y sus propiedades empezó mucho más tarde y tuvo su auge (en una variable compleja) entre los años 1970 y 1990.

Prop. $K_a(z) = \frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}$, $a, z \in \mathbb{D}$. (Por tanto, es una función analítica de z y anti-analítica de a.)

Dem. $\square$ $K_a \in A^2$. Sea $K_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(a) z^m$ su desarrollo en serie de Taylor en $\mathbb{D}$ (obviamente, los coeficientes dependerán de a).

Partiendo de la relación $f(a) = \langle f, K_a \rangle$, $\forall f \in A^2$, para $f(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, obtenemos

$$a^n = \langle z^n, K_a(z) \rangle = \left\langle z^n, \sum_{m=0}^{\infty} c_m(a) z^m \right\rangle$$

$$\overset{*}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{c_m(a)} \langle z^n, z^m \rangle$$

$$= \frac{\overline{c_n(a)}}{n+1} .$$

(* el intercambio de la $\int_{\mathbb{D}}$ en $\langle f, g \rangle$ y de la $\sum_m$ se justifica como antes: primero $\int_0^R$, luego $R \to 1^-$.)

$$\Rightarrow c_n(a)=(n+1)\bar{a}^n \Rightarrow \boxed{K_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{a}^n z^n=\frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}}.$$

[Justificación: $|\lambda|<1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\lambda^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\right)'=\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)'=\frac{1}{(1-\lambda)^2};\quad \lambda=\bar{a}z.]$$

Corolario. (Fórmula reproductiva) $\forall f\in A^2$, $\forall a\in\mathbb{D}$,

$$f(a)=\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{K_a(z)}\,dA(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(z)}{(1-a\bar{z})^2}\,dA(z).$$

Obs/n La integral $\int_{\mathbb{D}}\frac{f(z)}{(1-a\bar{z})^2}dA(z)$ es finita para toda $f\in L^1(\mathbb{D},dA)$:

$$|1-a\bar{z}|\geq 1-|a||\bar{z}|\geq 1-|a|>0 \quad (a\in\mathbb{D}) \Rightarrow$$

$$\left|\int_{\mathbb{D}}\frac{f(z)}{(1-a\bar{z})^2}dA(z)\right|\leq\int_{\mathbb{D}}\frac{|f(z)|}{|1-a\bar{z}|^2}dA(z)<\frac{1}{(1-|a|)^2}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|\,dA(z).$$

- Es fácil ver que

$$Pf(a)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(z)}{(1-a\bar{z})^2}dA(z)$$

es una función analítica de $a\in\mathbb{D}$, bien derivando dentro del signo de la integral respecto a $a\in\mathbb{D}$, bien desarrollando en serie:

$$Pf(a)=\int_{\mathbb{D}}f(z)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n\bar{z}^n\,dA(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_{\mathbb{D}}f(z)\bar{z}^n\,dA(z)\cdot a^n,$$

convergente en $\mathbb{D}$.

- En particular, cuando $f\in L^2(\mathbb{D},dA)$, la fórmula

$$Pf(a)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(z)}{(1-a\bar{z})^2}dA(z)=\langle f,K_a\rangle_{L^2(\mathbb{D},dA)};\quad P:L^2(\mathbb{D},dA)\to A^2$$

define la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D},dA)$ sobre su subespacio cerrado A^2, llamada la proyección de Bergman.

$\|P\|=1$ (proyección ort.)

Obviamente, $\forall f \in A^2$, $Pf(a) = \langle f, K_a \rangle_{L^2} = \langle f, K_a \rangle_{A^2} = f(a)$

$\Rightarrow$ P fija todo elemento de A^2.

• Puesto que $Pf(a)$ tiene sentido $\forall f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$, cabe preguntarse si P es un operador acotado de L^1 en A^1 o de algún $L^p(\mathbb{D})$ en A^p.

El siguiente resultado fue probado por Zaharjuta y Yudovich en 1964 usando los operadores integrales singulares (en concreto, la transformada de Beurling) y en 1974 por Forelli y Rudin, usando estimaciones integrales.

Teorema. Sea $1<p<\infty$. Entonces la proyección de Bergman, P, es un operador acotado de $L^p(\mathbb{D}, dA)$ sobre A^p.

Idea de la prueba. $\square$ $P: L^p(\mathbb{D}) \to A^p$ acotado significa:

$\exists C_p > 0$ t.q. $\|Pf\|_{A^p} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{D})}$, $\forall f \in L^p(\mathbb{D}, dA)$.

Es decir:

$$\int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1-a\bar{z})^2} dA(z) \right|^p dA(a) \leq C_p^p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z).$$

El paso clave consiste en considerar el operador sublineal

$$Tf(a) = \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{|1-a\bar{z}|^2} dA(z), \quad f \in A^p, a \in \mathbb{D},$$

(en lugar de Pf) y demostrar que éste es acotado:

$$\int_{\mathbb{D}} |Tf(a)|^p dA(a) \leq C_p^p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z),$$

algo que a priori no es nada obvio, puesto que no es un operador lineal y $|Pf(a)| \leq |Tf(a)|$, $\forall a \in \mathbb{D}$.

sin embargo, la demostración funciona, usando la estimación integral

$$(E) \qquad \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{t-2}}{|1-a\bar{z}|^s}\, dA(a) \leq C(1-|a|^2)^{t-s},$$

para $z \in \mathbb{D}$, $1<t<s$ y cierto $C = C(s,t) > 0$, combinada con la desigualdad de Hölder (usada hábilmente) y el Teorema de Fubini. $\boxtimes$

- La prueba del lema (E) exige cierto trabajo.

- Del Tma. sobre la proyección se deduce el siguiente resultado, análogo a la dualidad entre $L^p(\mathbb{D})$ y $L^q(\mathbb{D})$ pero más difícil.

Tma. (Zaharjuta–Yudovich, 1964). Sea $1<p<\infty$ y q t.q. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. El espacio dual de A^p puede identificarse con A^q: cada $\Phi \in (A^p)^*$ tiene representación única

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\bar{g}\, dA, \quad \forall f \in A^p$$

para cierto $g \in A^q$.

Las normas de Φ y de g son equivalentes; más precisamente, $\exists C>1$ t.q. $\|\Phi\| \leq \|g\|_{A^q} \leq C\|\Phi\|$.

- Problema abierto: Calcular $\|P\|$, siendo $P: L^p(\mathbb{D}) \to A^p$ la proyección de Bergman, para $1<p<\infty$, $p \neq 2$.

Tma. (Zhu, 2005, Dostanić, 2008) $\exists$ constantes C_1, C_2 t.q.

$$\frac{C_1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}} \leq \|P\|_p \leq \frac{C_2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}, \quad \forall p \in (1,\infty).$$