(21) M, 27/04/2021

Subespacios invariantes del operador de desplazamiento

$S: H^2 \to H^2$, $Sf(z) = zf(z)$; $H^2 \cong \ell^2$, $S: \ell^2 \to \ell^2$

$S(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$

Desde el punto de vista del espacio ℓ^2, los subespacios invariantes de S no se entienden bien. Sin embargo, desde la perspectiva del espacio H^2, tienen una descripción muy explícita.

Teorema (Beurling, 1949). Para toda φ, función interna, el espacio $\varphi H^2 = \{\varphi f : f \in H^2\}$ es un subespacio S-invariante de H^2 (cerrado y no trivial). Recíprocamente, todo subespacio S-invariante, M, de H^2 con $M \neq \{0\}$ es de la forma $M = \varphi H^2$ para cierta función interna $\varphi \in M$.

Además, se tiene la unicidad en el siguiente sentido: si φ y ψ son internas y $\varphi H^2 = \psi H^2$, entonces $\frac{\varphi}{\psi} \equiv$ cte.

Dem. $\square$ • Observemos que el operador de multiplicación M_φ, dado por $M_\varphi f = \varphi f$, $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$, es una isometría:

$$\|M_\varphi f\|_{H^2}^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi^* f^*|^2 dm = \int_{\mathbb{T}} |f^*|^2 dm = \|f\|_{H^2}^2 .$$

$(|\varphi^*| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T})$

Esto implica que $M_\varphi(H^2) = \{\varphi f : f \in H^2\} = \varphi H^2$ es cerrado en H^2: si $\varphi f_n \to g$ en H^2, entonces $(\varphi f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, pero $\|\varphi f_n - \varphi f_m\|_{H^2} = \|f_n - f_m\|_{H^2}$, luego $(f_n)_n$ es otra sucesión de Cauchy. H^2 es completo $\Rightarrow \exists f \in H^2$ t.q. $f_n \to f$ en H^2 $\Rightarrow \varphi f_n \to \varphi f$ en H^2 (ya que $\|\varphi f_n - \varphi f\|_{H^2} = \|f_n - f\|_{H^2}$) $\Rightarrow \varphi f = g$.

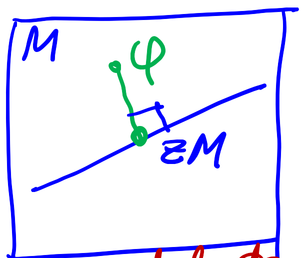
Conclusión: $M_\varphi(H^2)$ es cerrado.

$M_\varphi(H^2)=\varphi H^2$ es S-invariante: para $f\in H^2$, $zf\in H^2$, luego
$$z\cdot\varphi f=\varphi\cdot(zf)\in\varphi H^2.$$

- Veamos ahora que todo M, subespacio S-invariante de H^2, $M\neq\{0\}$, es de la forma φH^2 para cierta φ interna.

Dem. de Helson y Lowdenslager (1958). Sea M un subespacio S-invariante de H^2 t.q. $M\neq\{0\}$. Entonces existe en M una función con un coeficiente de Taylor $\neq 0$ (sin pérdida de generalidad, $=1$, ya que M es un espacio vectorial).

Sea $k\in\{0,1,2,\dots\}$ el mínimo entero tal que una función f de la forma $f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n\in M$, $c_k=1$. Entonces
$$f\notin zM=\{zg(z): g\in M\}$$
(por la minimalidad de k). Por tanto, zM es un subespacio propio de M y es cerrado por la misma prueba vista antes (con M en lugar de H^2 y $\varphi(z)=z$, función interna). Puesto que M es un espacio de Hilbert, $\exists\varphi\in M$ t.q. $\varphi\perp zM$.



$\varphi\in M$, M es S-invariante $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$, $z^n\varphi\in M$
$\Rightarrow \varphi\perp z^n\varphi$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \int_0^{2\pi}|\varphi^*(e^{it})|^2e^{-int}\,dm(t)=0$.

(sin pérdida de generalidad, $\|\varphi\|_2=1$.)

Conjugando, obtenemos $\int_0^{2\pi}|\varphi^*(e^{it})|^2e^{int}\,dm(t)=0$.

Esto significa que todos los coeficientes de Fourier de la función $|\varphi^*|^2\in L^1(\mathbb{T},dm)$ con índice $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ son nulos; el coeficiente restante es $\int_0^{2\pi}|\varphi^*(e^{it})|^2\,dm(t)=1$ ($|\varphi^*|=1$ en c.t.μ).

Por la teoría básica de las series de Fourier (vista en Fundamentos de Análisis Matemático del Máster, en Variable Real del Grado o en otra asignatura), $|\varphi^*|=1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. También sabemos que

$\varphi \in H^2 \Rightarrow$ por un tma. visto antes, $\varphi = P[\varphi^*]$, la integral de Poisson de sus límites radiales:

$$\varphi(z)=\varphi(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,\varphi^*(e^{it})\,dm(t)$$

$$\Rightarrow \forall z\in\mathbb{D},\quad |\varphi(z)| \le \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,|\varphi^*(e^{it})|\,dm(t) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,dm(t)=1$$

$\Rightarrow \varphi$ es interna.

• Veremos ahora que $M=\varphi H^2$. En primer lugar, ya sabemos que $\varphi, z\varphi, z^2\varphi, \ldots \in M \Rightarrow \forall$ polinomio P, $P\varphi\in M$. También sabemos (clase 9) que los polinomios son densos en H^2: $\forall f\in H^2\ \exists p_n$, polinomios, t.q. $p_n\to f$ en H^2. $|\varphi|\le 1$ en $\mathbb{D} \Rightarrow$ $p_n\varphi \to \varphi f$ en H^2. M es un subespacio cerrado, $p_n\varphi \in M$ $\Rightarrow \varphi f\in M$. Esto prueba que $\varphi H^2 \subseteq M$.

Puesto que φH^2 es un subespacio cerrado de M, para demostrar que $\varphi H^2 = M$, por la teoría básica de los espacios de Hilbert, basta demostrar que $h\in M$ y $h\perp\varphi H^2 \Rightarrow h=0$.

Si $h\in M$ y $h\perp \varphi H^2$, entonces $h\perp\varphi z^n$, para $n=0,1,2,\ldots$:

$$\int_0^{2\pi} h^*(e^{it})\,\overline{\varphi^*(e^{it})}\,e^{-int}\,dm(t)=0,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$h\in M \Rightarrow z^n h\in z^n M\subseteq zM$, $n=1,2,3,\ldots$; $\varphi\perp zM$, por construcción

$\Rightarrow \varphi\perp z^n h$, $n=1,2,3,\ldots$:

$$\int_0^{2\pi} h^*(e^{it})\,\overline{\varphi^*(e^{it})}\,e^{int}\,dm(t)=0,\quad n=1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} h^*(e^{it})\,\overline{\varphi^*(e^{it})}\,e^{-int}\,dm(t)=0,\quad n=-1,-2,-3,\ldots$$

$\Rightarrow$ todos los coeficientes de Fourier de $h^*\overline{\varphi^*}\in L^1(\mathbb{T})$ (por Cauchy-Schwarz, ya que $\varphi, h\in L^2(\mathbb{T})$) son nulos $\Rightarrow h^*\overline{\varphi^*}=0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$; $|\varphi^*|=1$ en c.t.p. de $\mathbb{T} \Rightarrow h^*=0$ en c.t.p.

$\Rightarrow h \equiv 0$ en $\mathbb{D}$.

- Nos queda la comprobación de la unicidad de la representación (salvo múltiplo cte). Supongamos que φ y ψ son internas y $\varphi H^2 = \psi H^2$.

$\varphi = \varphi \cdot 1 \in \varphi H^2 = \psi H^2 \Rightarrow \exists f \in H^2$ t.q. $\varphi = \psi f \Rightarrow \frac{\varphi}{\psi} \in H^2$.

Análogamente, $\frac{\psi}{\varphi} \in H^2$. Sea $u = \frac{\varphi}{\psi}$ y $h = u + \frac{1}{u}$. Entonces $u, \frac{1}{u} \in H^2 \Rightarrow h \in H^2$.

$|\varphi^*| = |\psi^*| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T} \Rightarrow |u^*| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, digamos $u(t) = e^{ia(t)}$, donde $a : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ (c.t.p.) $\Rightarrow$

¡Ojo! No sirve el Principio del módulo máximo pq. u^* sólo existe en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

$$h^*(e^{it}) = e^{ia(t)} + e^{-ia(t)} = 2\cos a(t) \in \mathbb{R}, \text{ en c.t.p.}$$

Pero $h = P[h^*]$, luego $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Pero $h \in H^2$ y, por el Tma. de la aplicación abierta, $h \equiv$ cte. Luego $u + \frac{1}{u} \equiv$ cte.

Resolviendo la ecuación cuadrática equivalente, $u \equiv$ cte

$\Rightarrow \frac{\varphi}{\psi} \equiv$ cte. $\boxtimes$

- Observación. Los subespacios S-invariantes de H^2 forman un conjunto parcialmente ordenado por inclusión.

Prop. Si $f \in H^2$, de entre todos los espacios S-invariantes que contienen a f, el espacio mínimo es

$$[f] = \overline{\{pf : p \text{ polinomio}\}},$$

tomando el cierre respecto a la norma de H^2.

- Suele decirse que $[f]$ es el espacio generado por f.
- La misma propiedad y terminología tienen sentido en otros espacios de funciones que contienen a los polinomios.

Dem. $\square$ Sea M cualquier subespacio S-invariante de H^2 tq. $f \in M$. Entonces $Pf \in M$, para todo polinomio P. M es cerrado $\Rightarrow$ $[f] = \overline{\{pf\}} \subseteq M$.

Por otra parte, $[f]$ es un subespacio S-invariante: es un espacio vectorial, es cerrado y $z[f] \subseteq [f]$. En efecto, si $g \in [f]$, existen polinomios p_n t.q. $g = \lim_{n\to\infty} p_n f$ (con la norma de H^2) $\Rightarrow$ $zg = z \lim_{n\to\infty} p_n f = \lim_{n\to\infty} (zp_n) f \in [f]$

(nótese que $\|zg - zp_n f\|_{H^2} = \|g - p_n f\|_{H^2} \to 0$, $n \to \infty$).

Conclusión: $[f]$ es el subespacio mínimo de entre todos los S-invariantes que contienen a f. $\boxtimes$

Def'n. f es un vector cíclico en H^2 si $[f] = H^2$.

- En particular, si f es un vector cíclico en H^2, entonces $\exists$ polinomios q_n t.q. $\|q_n f - 1\|_{H^2} \to 0$, $n \to \infty$.
- Desde Beurling, numerosos expertos han estudiado los vectores cíclicos en diversos espacios de funciones.

(Terminología usada en P. Duren, A. Schuster: Bergman Spaces, AMS, 2004: función cíclica).

Tma. Sea $f \in H^2$ e I_f su factor interno (en la factorización canónica). Entonces $[f] = I_f H^2$.

(Es decir: el espacio mínimo S-invariante de H^2 que contiene a f es el determinado por su factor interno.)

Corolario. f es un vector cíclico de H^2 $\Leftrightarrow$ f es una función externa de H^2.

Dem. □ Sea $f = I_f F_f$ la factorización canónica de f, con F_f externa de H^2. Obviamente, $f \in I_f H^2$. Puesto que $I_f H^2$ es cerrado y S-invariante, es claro que $[f] \subseteq I_f H^2$.

Veamos que $I_f H^2 \subseteq [f]$. Por el Tma. de Beurling, $\exists \varphi$ interna t.q. $[f] = \varphi H^2$. $f \in [f] \Rightarrow \exists h \in H^2$ t.q. $f = \varphi h$. Sea $h = I_h F_h$ la factorización canónica de h. Entonces

$$I_f F_f = \varphi I_h F_h .$$

Por la unicidad de la factorización canónica (demostrada en la clase anterior), $F_f = F_h$, $I_f = \varphi I_h$. Por tanto, $I_f \in \varphi H^2 = [f]$
$\Rightarrow [I_f] \subseteq [f] \Rightarrow I_f H^2 \subseteq [f]$, por los razonamientos vistos antes. ☒

Dem. del Corolario. □ f es externa $\Leftrightarrow I_f \equiv 1$
$\Leftrightarrow [f] = 1 \cdot H^2 = H^2$
$\Leftrightarrow f$ vector cíclico. ☒

- Conviene comentar que el Tma. de Beurling fue generalizado para otros valores de p. Para ello, se necesitan otras técnicas (dualidad, etc.).

Tma. (Srinivasan, Wang, 1965). Sea $p > 0$ y $f \in H^p$, con factorización canónica $f = I_f F_f$. Entonces $[f] = I_f H^p$.

(Notación en Duren: Theory of H^p spaces: $P[f]$ en lugar de $[f]$.
Koosis: Introduction to H_p spaces: ninguna notación especial.

Algunos teoremas de aproximación

Tma. (Frostman, 1935). Sea φ una función interna. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists t \in \mathbb{R}$ y B, producto de Blaschke, t.q. $\| \varphi - e^{it} B \|_\infty < \varepsilon$.

Tma. (Marshall, 1976). Las combinaciones convexas de los productos de Blaschke son densas en $\{f \in H^\infty : \|f\|_\infty \leq 1\} = B(H^\infty)$.

- Este teorema debe compararse con el de Fisher pero es mucho más difícil. (P. Koosis: Introduction to H_p Spaces, Cambridge University Press, 1998, Capítulo VII.)

Temas adicionales de espacios de Hardy

Teorema de los hermanos (F. y M.) Riesz, 1916. Sea μ una medida compleja de Borel sobre $\mathbb{T}$ t.q. $\int_{\mathbb{T}} e^{int} d\mu(t) = 0$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Entonces $\mu \ll m$.

(Formulación equivalente). Sea $\mu \in BV[a,b]$, con valores complejos y normalizada de manera que $\mu(t) = \mu(t^+)$, $\forall t \in [0, 2\pi)$ y t.q.

$$\int_0^{2\pi} e^{int} d\mu(t) = 0, \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Entonces $\mu \in AC[0, 2\pi]$.

Dem. $\square$ Sea $f = P[d\mu]$: $f(z) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, d\mu(t)$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$.

Entonces
$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, dm(\theta) \leq \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, d\mu(t) \right| dm(\theta)$$
$$\leq \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \left| \int_0^{2\pi} d\mu(t) \right| dm(\theta)$$
$$\leq V_0^{2\pi}(\mu) \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, dm(\theta)}_{=1}$$
$$= V_0^{2\pi}(\mu).$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)}_{\hat{\mu}(n),\ \text{para } n<0\ (\text{por hipótesis})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n)\, r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Esto nos dice que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f \in H^1$. Por tanto,

$$f = P[f^*], \quad f^* \in L^1(\mathbb{T}).$$

Puede demostrarse la unicidad en la representación como integral de Poisson. Por tanto, $d\mu = f^* dm$, con $f^* \in L^1(\mathbb{T})$ y esto implica que $\mu' = f^*$, $\mu \in AC[0, 2\pi]$. (Equivalentemente, $\mu \ll m$

$$m(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = \int_E f^* dm = 0.) \quad \boxtimes$$

Conjugada armónica. Proyección de Riesz

Prop. Si $u \in h(\mathbb{D})$, entonces $\exists f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ t.q. $u = f + \bar{g}$.

Dem. $\square$ • Si $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ y pedimos que su conjugada armónica cumpla $v(0) = 0$, v es única y

$$u = \frac{u+iv}{2} + \frac{u-iv}{2} = f + \bar{f}, \quad \text{con } f = \frac{u+iv}{2} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$
$$g = f.$$

• Si $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, sea $u = u_1 + iu_2$, $u_1, u_2 \in h(\mathbb{D})$, $u_1, u_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. según el caso anterior, $u_1 = f_1 + \bar{g}_1$, $u_2 = f_2 + \bar{g}_2$, $f_i, g_i \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $i = 1, 2$.

Entonces $u = u_1 + iu_2 = f_1 + \bar{g}_1 + i(f_2 + \bar{g}_2) = f_1 + if_2 + \overline{g_1 - ig_2}$

y podemos elegir $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 - ig_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. $\boxtimes$

Prop. Toda $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ puede considerarse armónica en $\mathbb{D}$ (una función en h^2). (identificación $\varphi \in L^2(\mathbb{T}) \longleftrightarrow u \in h^2$)

La razón es la siguiente:

• Si $u \in h^2$, entonces en c.t.p. $\exists\, u^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} u(re^{it})$ y $u \in L^2(\mathbb{T})$.

• Si, recíprocamente, $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, entonces $u = P[\varphi] \in h^2$, pq.

$u = \operatorname{Re} f$, donde

$$f(z)=f(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\varphi(t)\,dm(t)$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dm(t)}_{\hat\varphi(0)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-int}\varphi(t)\,dt}_{=\hat\varphi(n),\ n\geq 1}\, z^n .$$

$$\varphi\in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat\varphi(n)|^2<\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|\hat\varphi(n)|^2<\infty \Rightarrow f\in H^2 \Rightarrow u\in h^2.$$

- Si $\varphi\in L^2(\mathbb{T}) \longleftrightarrow u\in h^2$, es fácil identificar las funciones $f,g\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tq. $u=f+\bar g$; de hecho, ¡ $f,g\in H^2$!

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{int} \quad \text{(serie de Fourier)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{c_{-n}}}\, e^{-int} \quad \text{(escribiendo } \overline{\overline{c_n}} \text{ en lugar de } c_n\text{)}$$

Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{c_{-n}}\,z^n$, entonces $f,g\in H^2$ porque

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{c_{-n}}|^2<\infty \quad y$$

$$f^*(e^{it})=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{int}\, ;\ g^*(e^{it})=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{c_{-n}}\,e^{int}, \qquad f^*+\overline{g^*}=\varphi$$

$$\Rightarrow f+\bar g = u = P[\varphi].$$

- Observemos que, con $f,g\in H^2$, $f^*\perp \overline{g^*}$ en $L^2(\mathbb{T})$.

Por tanto, la transformación lineal

$$P_+ : u=f+\bar g \longmapsto f, \quad P_+ : L^2(\mathbb{T})\to H^2,$$

es una proyección ortogonal del espacio $L^2(\mathbb{T})$ de Hilbert sobre su subespacio H^2. Además, para cada $f\in H^2$,

$$P_+(f)=P_+(f+\bar 0)=f.$$

Def'n. $P_+ : L^2(\mathbb{T})\to H^2$ es la proyección de Riesz (o de Szegő).

• Deduciremos ahora una fórmula explícita para P_+.
Recordemos la fórmula para el núcleo reproductor en H^2:

$$f(a)=\langle f,k_a\rangle,\ f\in H^2, a\in\mathbb{D};\qquad k_a(z)=\frac{1}{1-\bar{a}z},\ a\in\mathbb{D},\ z\in\mathbb{D}.$$

Usando las variables z,w:

$$k_z(w)=\frac{1}{1-\bar{z}w},\quad f(z)=\langle f,k_z\rangle,\quad z\in\mathbb{D}.$$

$$u(z)=f(z)+\overline{g(z)}\Rightarrow \langle u,k_z\rangle=\langle f,k_z\rangle+\langle\bar{g},k_z\rangle=f(z)+0$$

$$\boxed{\Rightarrow f(z)=P_+u(z)=\langle u,k_z\rangle=\int_0^{2\pi}\frac{u(e^{it})}{1-e^{-it}z}\,dm(t)}$$

$(w=e^{it};\ \bar{w}=e^{-it})$

$g(0)=0$

$$\langle\bar{g},k_z\rangle=\int_0^{2\pi}\frac{\overline{g^*(e^{it})}}{1-ze^{-it}}\,dm(t)=\overline{\int_0^{2\pi}\frac{g^*(e^{it})}{1-\bar{z}e^{it}}\,dm(t)}$$

$$=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}\bar{z}^n\underbrace{\int_0^{2\pi}g^*(e^{it})e^{int}\,dm(t)}_{=0}}\quad \text{p.q. } g\in H^2, g(0)=0$$

• $f=u+i\tilde{u}$ $\quad$ ($\tilde{u}$: conjugada armónica de u)
$f=P_+u$.

← normas en h^p

• Demostrar que $\|\tilde{u}\|_p\le M\|u\|_p$ implicaría $\|P_+u\|_{H^p}\le C\|u\|_{h^p}$.

$$\|f\|_p\le\|u\|_p+\|\tilde{u}\|_p\le(1+M)\|u\|_p\Rightarrow \|P_+u\|_{H^p}\le C\|u\|_{h^p}.$$

Recíprocamente, $\|P_+u\|_{H^p}\le C\|u\|_{h^p}$, esto es, $\|f\|_p\le C\|u\|_p$

$$\Rightarrow\|\tilde{u}\|_p=\|i\tilde{u}\|_p\le\|u\|_p+\|u+i\tilde{u}\|_p=\|u\|_p+\|f\|_p\le(1+C)\|u\|_p.$$

$\uparrow$
$i\tilde{u}=(u+i\tilde{u})-u$

Demostrar que el operador $C: u\mapsto\tilde{u}$, $C: h^p\to h^p$ es acotado, $\forall p\in(1,\infty)$, es equivalente a: $P_+: L^p(\mathbb{T})\to H^p$ es acotado.