Fórmula de Lagrange

Dados $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ distintos y $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ (no necesariamente distintos), ya hemos visto que existe un único polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ tal que $P(z_k) = w_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

(P: polinomio de interpolación de Lagrange.)

¿Cómo calcularlo?

Existe una fórmula explícita para P, basada en ciertas expresiones auxiliares, conocidas como los polinomios fundamentales:

$$L_k(z) = \frac{\prod_{0 \le j \le n, j \ne k} (z - z_j)}{\prod_{0 \le j \le n, j \ne k} (z_k - z_j)} = \frac{(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\dots(z-z_n)}{(z_k-z_0)(z_k-z_1)\dots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\dots(z_k-z_n)},$$

$k = 0, 1, \dots, n$. Es fácil ver que $gr(L_k) = n$ y

$$L_k(z_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \ne k \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Por tanto, si definimos

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k L_k(z),$$

vemos que $gr(P) \le n$ y, además,

$$P(z_j) = \sum_{k=0}^{n} w_k L_k(z_j) = w_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Por consiguiente, P es el polinomio de Lagrange que buscamos.

Esquema de interpolación de Hermite

Podemos extender el esquema de interpolación de Lagrange a una situación más general, que surge en muchos problemas prácticos, prescribiendo no sólo los valores del polinomio (en los puntos dados sino también los valores de sus derivadas hasta cierto orden predeterminado:

$$(*)\begin{cases} P(z_0)=w_0,\ P'(z_0)=w_0^{(1)},\dots,\ P^{(m_0)}(z_0)=w_0^{(m_0)};\\ P(z_1)=w_1,\ P'(z_1)=w_1^{(1)},\dots,\ P^{(m_1)}(z_1)=w_1^{(m_1)};\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ P(z_n)=w_n,\ P'(z_n)=w_n^{(1)},\dots,\ P^{(m_n)}(z_n)=w_n^{(m_n)}, \end{cases}$$

donde $m_0, m_1, \dots, m_n$ son enteros y ≥ 0 (posiblemente distintos) y en total hay $N+1=(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)=m_0+m_1+\dots+m_n+n+1$ valores prescritos $w_0, w_0^{(1)},\dots,w_0^{(m_0)}, w_1,\dots, w_n^{(m_n)}$.

Teorema Si $z_i \neq z_j$ para $i\neq j$, $(0\leq i,j\leq n)$ entonces el problema $(*)$ de Hermite tiene solución polinómica única (de grado $\leq N=m_0+\dots+m_n+n$).

Dem. $\square$ Escribiendo el polinomio P de forma habitual, el sistema de condiciones $(*)$ se convierte en un sistema lineal con los coeficientes de P como incógnitas, al igual que antes.

Si $P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_Nz^N$, tendremos, p.ej.:

$$P(z_0)=w_0: \quad a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\dots+a_Nz_0^N=w_0$$

$$P'(z_1)=w_1^{(1)}: \quad a_1+2a_2z_1+3a_3z_1^2+\dots+Na_Nz_1^{N-1}=w_1^{(1)}, \quad \text{etc.}$$

Según la alternativa de Fredholm (versión básica de Álgebra Lineal), el sistema ⊛ tendrá solución única si y sólo si el sistema homogéneo correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} P(z_0)=P'(z_0)=\dots=P^{(m_0)}(z_0)=0 \\ P(z_1)=P'(z_1)=\dots=P^{(m_1)}(z_1)=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ P(z_n)=P'(z_n)=\dots=P^{(m_n)}(z_n)=0 \end{array}\right\} \quad (*_0)$$

sólo tiene solución trivial: $a_0=a_1=\dots=a_N=0$.

Veamos que, en efecto, eso es cierto.

Si P es un polinomio de grado $\leq N$ que satisface todas las condiciones en $(*_0)$ salvo la última: $P^{(m_n)}(z_n)=0$, entonces P tiene como factores $(z-z_0)^{m_0+1}, \dots (z-z_{n-1})^{m_{n-1}+1}$ y $(z-z_n)^{m_n}$. Por tanto,

$$P(z)=Q(z)\,(z-z_0)^{m_0+1}(z-z_1)^{m_1+1}\dots(z-z_{n-1})^{m_{n-1}+1}(z-z_n)^{m_n},$$

para cierto polinomio Q, donde

$$\operatorname{gr} Q+(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_{n-1}+1)+m_n$$

$$=\operatorname{gr} Q+(m_0+m_1+\dots+m_n)+n=\underline{\operatorname{gr} Q+N=\operatorname{gr} P\leq N.} \quad (\operatorname{gr} P=N)$$

Por tanto, $\operatorname{gr} Q\leq 0$, así que $Q\equiv$ cte, digamos $Q=C$:

$$P(z)=\underbrace{C\,(z-z_0)^{m_0+1}(z-z_1)^{m_1+1}\dots(z-z_{n-1})^{m_{n-1}+1}}_{R(z)}(z-z_n)^{m_n}.$$

Derivando m_n veces y evaluando en z_n, obtenemos:

$$p^{(m_n)}(z_n) = \sum_{j=0}^{m_n} \binom{m_n}{j} R^{(m_n-j)}(z_n) \frac{d^j}{dz^j}(z-z_n)^{m_n}\Big|_{z=z_n}$$

$$= R(z) \frac{d^{m_n}}{dz^{m_n}} (z-z_n)^{m_n}\Big|_{z=z_n}$$

$$= C\, m_n!\, (z_n-z_0)^{m_0+1}(z_n-z_1)^{m_1+1} \cdots (z_n-z_{n-1})^{m_{n-1}+1} = 0$$

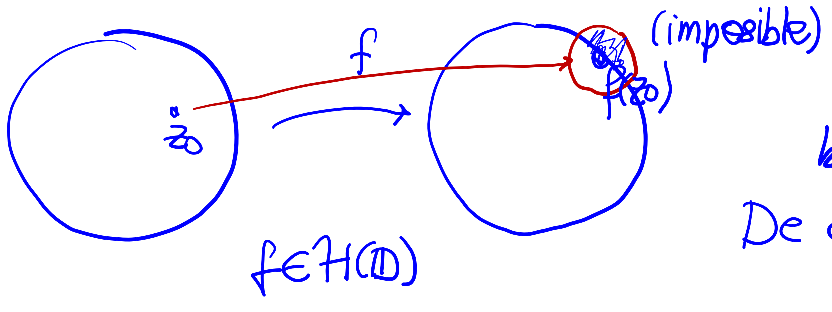
(la última condición que quedaba por usar) $\Rightarrow C=0.$

Se sigue que $P\equiv 0$: el sistema homogéneo sólo tiene solución trivial. $\boxtimes$

- Veremos ahora otro tipo de interpolación finita. Esta vez, en lugar de interpolar por polinomios, interpolaremos por funciones analíticas acotadas por uno. Necesitaremos ciertos preparativos para abordar el problema.

Lema de Schwarz invariante

El lema de Schwarz trata con autoaplicaciones analíticas del disco $\mathbb{D}=\{z: |z|<1\}$. En el enunciado aparece la condición $|f(z)|\leq 1$ pero, si $f\not\equiv$ cte y es analítica, entonces por el Principio del módulo máximo (o por el Teorema de la aplicación abierta) no es posible que $|f(z_0)|=1$ para ningún $z_0\in\mathbb{D}$.



Por tanto, $|f(z)|\leq 1$ significa que bien $|f(z)|<1$, $\forall z\in\mathbb{D}$ o bien $f(z)\equiv\lambda$, $|\lambda|=1$.

De ahí que en el caso no trivial:

$f \neq$ de se tenga $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ $(\forall z \in \mathbb{D},\ |f(z)|<1)$: autoaplicación del disco.

Lema de Schwarz. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0)=0$ y $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq 1$, entonces se cumple más: a) $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$;

b) $|f'(0)| \leq 1$.

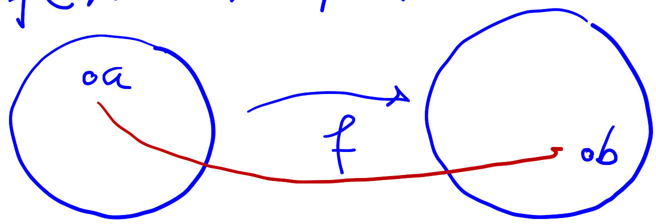
Si la igualdad se cumple en a) para un $z \neq 0$ o se cumple en b), entonces f es una rotación: $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda|=1$ t.q. $f(z)=\lambda z$. (A veces lo escribimos como $f(z)=e^{it}z$, $t \in \mathbb{R}$, que es lo mismo.)

- El lema de Schwarz se demuestra a partir del Principio del módulo máximo. Tiene como consecuencia la caracterización de los automorfismos del disco.

Def'n. Un automorfismo del disco unidad $\mathbb{D}$ es una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y biyectiva (f inyectiva y $f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$).

Notación. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{$automorfismos del disco$\}$.

- Los automorfismos del disco forman un grupo respecto a la composición $\circ$, con la aplicación identidad: $id(z)=z$ como neutro. (Para ver que la fcn inversa de un automorfismo es otro automorfismo, nos ayuda el Teorema de la función inversa de Variable Compleja I.)
- Puede verse que el grupo $(\mathrm{Aut}(\mathbb{D}), \circ)$ actúa de forma transitiva: $\forall a,b \in \mathbb{D}\ \exists f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ t.q. $f(a)=b$. Esto se sigue de la caracterización de los automorfismos.



Ejemplos.

- $R_\lambda(z)=\lambda z$, $|\lambda|=1$ (rotación); $R_\lambda\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.
- $a\in\mathbb{D}$, $\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar a z}$: automorfismo involución.

$\varphi_a\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ porque $z\in\mathbb{D}\Rightarrow |\bar a z|<1 \Rightarrow |1-\bar a z|\geq 1-|\bar a z|>0$.

$\varphi_a(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$ debido a la fórmula útil:

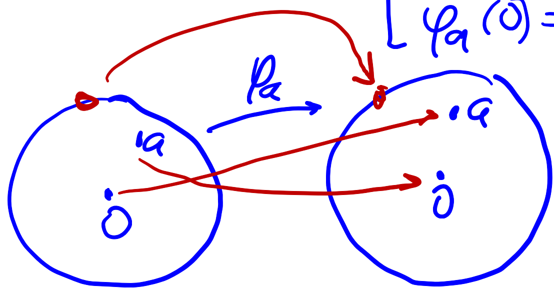
$$\boxed{1-|\varphi_a(z)|^2=}\ 1-\frac{|a-z|^2}{|1-\bar a z|^2}=\frac{|1-\bar a z|^2-|a-z|^2}{|1-\bar a z|^2}$$

$$=\frac{1-2\mathrm{Re}(\bar a z)+|\bar a z|^2-\left(|a|^2-2\mathrm{Re}(\bar a z)+|z|^2\right)}{|1-\bar a z|^2}$$

$$=\frac{1-|a|^2-|z|^2+|a|^2|z|^2}{|1-\bar a z|^2}=\boxed{\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar a z|^2}}.$$

Por tanto: $\left.\begin{array}{l}|z|<1\\ |a|<1\end{array}\right\}\Rightarrow 1-|\varphi_a(z)|^2>0\Rightarrow|\varphi_a(z)|<1$ $\quad\left[\begin{array}{l}\varphi_a(a)=0\\ \varphi_a(0)=a\end{array}\right]$

$|z|=1\Rightarrow|\varphi_a(z)|=1$.



Obsérvese también que

$\varphi_a'(z)=-\dfrac{1-|a|^2}{(1-\bar a z)^2}$, luego también

$$\boxed{1-|\varphi_a(z)|^2=(1-|z|^2)\,|\varphi_a'(z)|}.$$

¿Por qué involución? (es decir, $\varphi_a^{-1}=\varphi_a$):

Cálculo directo: $\varphi_a\circ\varphi_a=id$

$$\varphi_a(\varphi_a(z))=\frac{a-\varphi_a(z)}{1-\bar a\varphi_a(z)}=\frac{a-\frac{a-z}{1-\bar a z}}{1-\bar a\frac{a-z}{1-\bar a z}}=\frac{\frac{a(1-\bar a z)-(a-z)}{\cancel{1-\bar a z}}}{\frac{(1-\bar a z)-\bar a(a-z)}{\cancel{1-\bar a z}}}=\frac{z-|a|^2z}{1-|a|^2}$$

$=z$.

Corolario de Schwarz. $\varphi \in Aut(\mathbb{D}) \Rightarrow \exists a \in \mathbb{D}, \exists \lambda$ con $|\lambda|=1$ t.q. $\varphi(z) = \lambda \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. Esto es, $\varphi = R_\lambda \circ \varphi_a$.

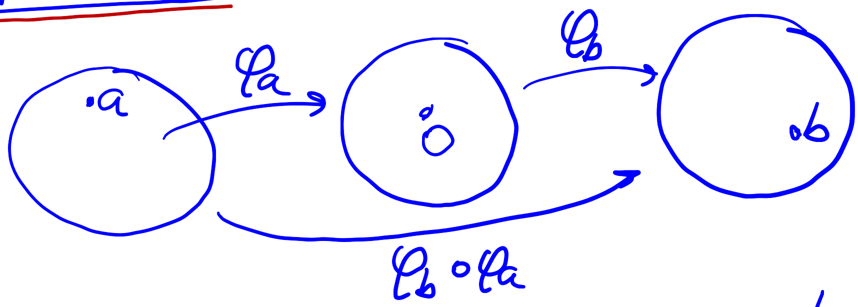
(Las rotaciones y las involuciones generan todo el grupo.)

Indicaciones para demostrarlo. $\square$ Sea $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$, $\exists a \in \mathbb{D}$ t.q. $\varphi(a)=0$. Considerar $f = \varphi \circ \varphi_a$. ¿Qué hace con el origen? Aplicar el Lema de Schwarz... $\boxtimes$

• También es cierto que $\exists \mu, |\mu|=1, \exists b \in \mathbb{D}$ t.q. $\varphi = \varphi_b \circ R_\mu$.

Ejercicio. Determinar μ, b en función de λ, a.

• **Observación (acción transitiva):** $\forall a,b \in \mathbb{D}$ $\exists \varphi \in Aut(\mathbb{D})$ t.q. $\varphi(a)=b$:



• En el Lema de Schwarz, el origen tenía un papel especial. Ahora ya estamos en condiciones de dar otro enunciado que no hace distinciones entre los puntos del disco y es invariante en cierto sentido.

Lema de Schwarz-Pick. Si $f \in H(\mathbb{D})$ y $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, entonces $\forall z,w \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)} \right| \le \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| \quad (1)$$

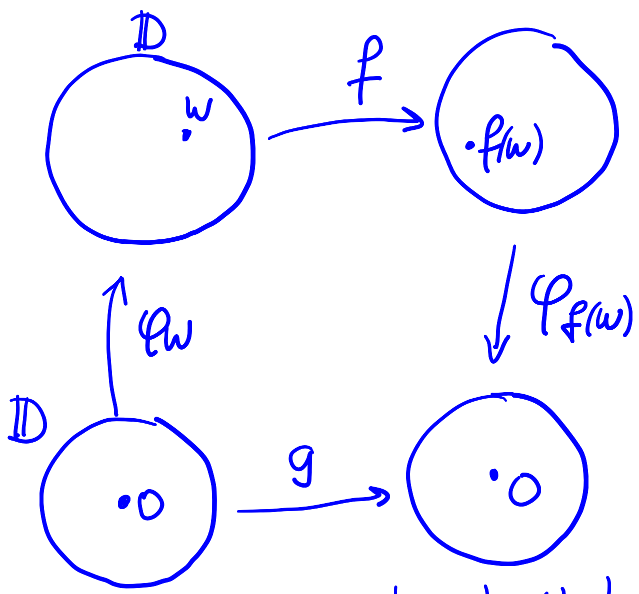
y $$|f'(z)|(1-|z|^2) \le 1-|f(z)|^2. \quad (2)$$

La igualdad se cumple en (1) o en (2) $\Leftrightarrow f \in Aut(\mathbb{D})$.

$$\left(\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right| = |\varphi_w(z)| \right)$$

Observemos que esto generaliza Schwarz: si $f(0)=0$, eligiendo $w=0$, obtenemos $|f(z)|\le|z|$ de (1) y, para $z=0$ de (2) se deduce que $|f'(0)|\le 1$.

Dem. □



Sea $g=\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w$. Entonces $g\in H(\mathbb{D})$, $g(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$ y $g(0)=\varphi_{f(w)}(f(w))=0$.

Lema de Schwarz $\Rightarrow$ $|g(z)|\le|z|$ $\Rightarrow$ $|\varphi_{f(w)}(f(\varphi_w(z)))|\le|z|$, $\forall z\in\mathbb{D}$. $\varphi_w:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ biyectiva y es su propio inverso $\Rightarrow$ $\forall a\in\mathbb{D}\ \exists z\in\mathbb{D}$ con $\varphi_w(z)=a$, $z=\varphi_w(\underline{\varphi_w(z)})=\varphi_w(a)$ $\Rightarrow$ $\forall a\in\mathbb{D}$, $|\varphi_{f(w)}(f(a))|\le|\varphi_w(a)|$. Sustituimos a por z:

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}\,f(z)}\right|\le\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$$

y recordamos que $|1-\overline{w}z|=|\overline{1-\overline{w}z}|=|1-w\overline{z}|$, etc., obteniendo (1).

A partir de (1), dividiendo y multiplicando, obtenemos

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\cdot|1-\overline{z}w|\le|1-\overline{f(z)}\,f(w)|.$$

Dejamos que $w\to z$: $|1-\overline{z}w|\to|\underbrace{1-|z|^2}_{>0}|=1-|z|^2$, etc.

y se sigue (2).

• ¿Cuándo se tiene la igualdad?

Si se tiene en (1) para ciertos $z, w \in \mathbb{D}$, $z \neq w$, entonces $\varphi_w(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \neq 0$, así que se tiene igualdad en Schwarz en un punto $\neq 0$ $\Rightarrow$ g es una rotación:

$$g = \varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w = R_\lambda \quad , |\lambda| = 1.$$

$$\Rightarrow f = (\varphi_{f(w)} \circ \varphi_{f(w)}) \circ f \circ \underbrace{(\varphi_w \circ \varphi_w)}_{} = \varphi_{f(w)} \circ R_\lambda \circ \varphi_w \in Aut(\mathbb{D})$$

(como composición de 3 automorfismos).

Ejercicio. Comprobar que para todo automorfismo se cumple la igualdad en (1).

• También en (2), debido a $\varphi = R_\lambda \circ \varphi_a$ y la identidad

$$(1-|z|^2)|\varphi_a'(z)| = 1 - |\varphi_a(z)|^2, \text{ etc.}$$

Ejercicio. Comprobar que si se tiene la igualdad en (2), entonces $f \in Aut(\mathbb{D})$. ☒

Pista: Ver que $|g'(0)| = 1$, usando la regla de la cadena.
(Usar la condición para la igualdad en Schwarz.)