(19) M, 20/04/2021

Espacios de Hardy de funciones armónicas. Teoremas de Herglotz y Plessner

- Podemos considerar las medias integrales de orden p para toda función u continua en $\mathbb{D}$:

$$M_p(r;u) = \left[\int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dm(t)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 0<p<\infty, \ 0<r<1,$$

$$M_\infty(r;u) = \max_{0\le t\le 2\pi} |u(re^{it})| \quad , \ 0<r<1, \qquad \left(dm(t) = \frac{dt}{2\pi}\right)$$

interpretando $\quad M_p(0;u) = |u(0)|, \ 0<p\le\infty.$

<u>Def'n.</u> Se dice que $u: \mathbb{D}\to\mathbb{R}$ pertenece al espacio armónico de Hardy, h^p $(0<p\le\infty)$, si $u\in h(\mathbb{D})$ y $\|u\|_p = \sup_{0\le r<1} M_p(r;u)<\infty$.

<u>Observaciones.</u> <u>1)</u> h^p es un espacio vectorial.
(debido a la desigualdad $\max\{a^p,b^p\}\le (a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p)$, $a,b\ge 0$).

<u>2)</u> $f=u+iv$; $\quad f\in H^p \Leftrightarrow u,v\in h^p$.

<u>3)</u> Al igual que en el caso de los espacios H^p, $\|u\|_p \nearrow$ cuando $p\nearrow$.
Por tanto, $0<p<q\le\infty \Rightarrow h^q\subseteq h^p$.

<u>4)</u> $\|\cdot\|_p$ es una norma si $1\le p\le\infty$. Cuando $0<p<1$, no es una norma pero induce una métrica invariante por traslaciones:

$$d_p(u,v) = \|u-v\|_p^p.$$

- El siguiente teorema clásico caracteriza las funciones en

$$h^1 = \{u: \mathbb{D}\to\mathbb{R} : u\in h(\mathbb{D}), \ \sup_{0\le r<1} M_1(r;u)<\infty\}.$$

El resultado fue probado por Plessner en 1923 aunque el corolario (de la demostración) sobre las funciones armónicas positivas se remonta a 1911 y se debe a Herglotz.

Teorema (Plessner). Las siguientes clases de funciones $u: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ coinciden:

(1) las integrales de Poisson–Stieltjes:

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

con $\mu \in BV[0,2\pi]$ (y con valores reales);

(2) $\{u_1 - u_2 : u_1, u_2 \in h(\mathbb{D}),\ u_1, u_2 \geq 0 \text{ en } \mathbb{D}\}$;

(3) h^1.

Dem. $\square$ Demostraremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2): Ya sabemos que $\mu \in BV[0,2\pi] \Rightarrow \exists g, h \nearrow$ en $[0,2\pi]$ t.q. $\mu = g - h$. Como también comentamos en la última clase, las fnes

$$u_1(z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,dg(t), \quad u_2(z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,dh(t), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

son armónicas en $\mathbb{D}$ y ambas son positivas. Por tanto,

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t) = u_1(z) - u_2(z).$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Sean $u_1, u_2 \in h(\mathbb{D})$, con $u_1, u_2 \geq 0$ en $\mathbb{D}$ y $u = u_1 - u_2$. Entonces

$$M_1(r;u) = \int_0^{2\pi} |u_1(re^{it}) - u_2(re^{it})|\,dm(t) \leq \int_0^{2\pi} \underbrace{u_1(re^{it})}_{\geq 0}\,dm(t) + \int_0^{2\pi} \underbrace{u_2(re^{it})}_{\geq 0}\,dm(t)$$

$$= u_1(0) + u_2(0) < \infty, \quad \forall r \in [0,1) \quad \Rightarrow u \in h^1.$$

→ (propiedad del valor medio)

(3) $\Rightarrow$ (1): Sea $u \in h^1$. Definamos la fcn μ_r mediante

$$\mu_r(t) = \int_0^t u(re^{i\theta})\,d\theta, \quad r \in [0,1),\ t \in [0,2\pi].$$

Entonces:

- $\mu_r(0) = 0$
- $\mu_r'(t) = u(re^{it})$ (Tma. fundamental del cálculo)

• $\mu_r \in BV[0,2\pi]$, con $V_0^{2\pi}(\mu_r) \le 2\pi \cdot \sup\limits_{0\le r<1} M_1(r,u) = 2\pi \cdot \|u\|_{h^1}$.

En efecto, para una partición cualquiera $P: 0=t_0<t_1<\ldots<t_n=2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu_r(t_k)-\mu_r(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(re^{i\theta})\,d\theta \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u(re^{i\theta})|\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\,d\theta \le 2\pi \cdot \|u\|_{h^1}.$$

Por el Tma. de selección de Helly (caso especial del Tma. de Banach-Alaoglu), se sigue la existencia de una sucesión $(r_k)_{k=1}^{\infty}$, con $r_k \nearrow 1$, t.q. $\mu_{r_k}(t) \to \mu(t)$, $\forall t\in[0,2\pi]$ y cierta $\mu \in BV[0,2\pi]$, donde además

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu_{r_k}(t)$$

(Prop. de la integral R-S cuando $\mu_{r_k} \in C^1[0,2\pi]$) $\longrightarrow$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,u(r_k e^{it})\,dt$$

(Tma. de Schwarz (sol'n al problema de Dirichlet)) $\longrightarrow$

$$= \lim_{k\to\infty} u(r_k z)$$

$\longleftarrow$ ($u \in C(\mathbb{D})$, $|r_k z| \le |z|$)

$$= u(z).$$

$\boxtimes$

• Si repasamos los detalles de la demostración de (2) ⇒ (3) y (3) ⇒ (1), partiendo de una $\mu = g \nearrow$ en $[0,2\pi]$, obtenemos el siguiente Corolario:

Tma. de representación de Herglotz. $u \in h(\mathbb{D})$, $u \ge 0$ en $\mathbb{D}$ $\iff$ $\exists \mu \nearrow$ en $[0,2\pi]$ t.q. $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t)$.

Corolario. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $\operatorname{Re} f \ge 0$ en $\mathbb{D}$ $\Rightarrow$ $\exists \mu \nearrow$ en $[0,2\pi]$, $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ t.q.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t) + i\gamma, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Dem. □ Sea $f = u+iv$; entonces $u \in h(\mathbb{D})$ y $u \ge 0$ en $\mathbb{D}$, así que tenemos la representación de Herglotz:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\,d\mu(t).$$

Completando u, obtenemos una fcn analítica $f_\gamma=u+iv+i\gamma$, $\gamma\in\mathbb{R}$ (la conjugada armónica en $\mathbb{D}$ es única, salvo el sumando $i\gamma$).

$$P(r,\theta-t)=\operatorname{Re}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}=\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\Rightarrow \qquad (\mu:\mathbb{D}\to\mathbb{R})$$

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right\}$$

y el resultado para f se sigue. $\boxtimes$

- También podemos entender $\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\,d\mu(t)$, etc., como una integral respecto a una medida positiva, $\tilde{\mu}$, inducida por la fcn μ): (identificación: $\tilde{\mu}\cong\mu$)

para un intervalo abierto $I\subseteq[0,2\pi]$: (χ_I : fcn característica de I)

$$\tilde{\mu}(I)=\int_I d\mu(t)=\int_0^{2\pi}\underbrace{\chi_I(t)}_{\geq 0}\,\underbrace{d\mu(t)}_{\mu\nearrow}\geq 0.$$

Después $\tilde{\mu}$ se extiende a todos los conjuntos de Borel (obtenidos tomando $\cap$, $\cup$, ^{c} de los intervalos abiertos) como medida positiva en la σ-álgebra de los cjtos. de Borel.

- Se plantea la siguiente pregunta: ¿es μ única en el Tma. de Plessner (o en el de Herglotz)? Siendo $\mu=g-h$, $g,h\nearrow$, podamos pensar en $\mu\in BV[0,2\pi]$ como en una medida con signo (= diferencia de dos medidas positivas). Respuesta: sí.

Dem. de la unicidad de la medida μ.

$\square$ Supongamos que $\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\,d\mu(t)=0$, $\forall z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$. Completando la función analíticamente, obtenemos que $\exists\gamma\in\mathbb{R}$ t.q.

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)=i\gamma,\quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

Puesto que $\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n$ ← (visto antes)

(serie de Taylor en $\mathbb{D}$), se sigue que

$$i\gamma = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\mu(t)}_{\in\mathbb{R}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)\, z^n, \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

Por la unicidad de la serie de Taylor, obtenemos: $\gamma=0$ y

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) = 0, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Conjugando (¡μ es real!), obtenemos también

$$\int_0^{2\pi} e^{int} d\mu(t) = 0, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Por tanto, para todo polinomio trigonométrico $P(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ se tiene que

$$\int_0^{2\pi} P(e^{it})\, d\mu(t) = 0.$$

Por el Tma. de Weierstrass, los polinomios trigonométricos son densos en $\tilde{C}[0,2\pi] = \{f\in C[0,2\pi] : f(0)=f(2\pi)\}$.

Si $f\in\tilde{C}[0,2\pi]$, dado $\varepsilon>0$, $\exists P$, polinomio trigonométrico, t.q.

$|f-P|<\varepsilon$ en $[0,2\pi]$ $\Rightarrow$

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)\, d\mu(t)\right| = \left|\int_0^{2\pi} [f(t)-P(e^{it})]\, d\mu(t)\right| \le \int_0^{2\pi} |f(t)-P(e^{it})|\, |d\mu(t)|$$

$$< \varepsilon V_0^{2\pi}(\mu)$$

Otra prop. básica de la int. R-S: $u\in C[a,b]$, $\mu\in BV[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b u\, d\mu\right| \le \|u\|_\infty \cdot V_a^b(\mu)$.

$\Rightarrow \forall f\in\tilde{C}[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi} f(t)\, d\mu(t) = 0$.

$\tilde{C}[0,2\pi]$ es denso en $L^1(0,2\pi)\cong L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, d\mu(t) = 0, \quad \forall f\in L^1(0,2\pi)$$

$\Rightarrow \forall$ intervalo abierto $I\subseteq[0,2\pi]$, $\mu(I) = \int_I d\mu = \int_0^{2\pi} \chi_I\, d\mu = 0$

$\Rightarrow \forall E \subseteq [0,2\pi]$, conjunto de Borel, $\mu(E)=0$.

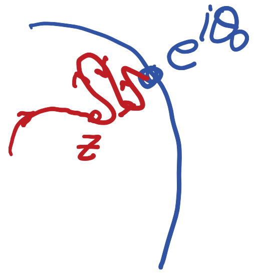
La unicidad de μ queda demostrada. $\boxtimes$

TEOREMA DE FATOU

- Partiendo de la representación de las funciones h^1, podemos estudiar su comportamiento frontera.
- Esencialmente, ya hemos comentado antes la siguiente observación. Puesto que la demostración es muy directa, la veremos.

Prop. Sea $\varphi \in L^1(0,2\pi)$ y $u = P[\varphi]$: $u(z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\varphi(t)\,dm(t)$, $\forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Si φ es continua en $\theta_0 \in [0,2\pi]$, entonces

$$\varphi(\theta_0) = \lim_{z \to e^{i\theta_0}} u(z).$$



Dem. $\square$ Sabemos que

$$\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,dm(t) \underset{\theta-t=s}{=} \int_0^{2\pi} P(r,s)\,dm(s) = 1$$

Por tanto,

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(\theta_0)| = \left| \int_0^{2\pi} (\varphi(t) - \varphi(\theta_0))\, P(r,\theta-t)\,dm(t) \right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |\varphi(t) - \varphi(\theta_0)|\, P(r,\theta-t)\,dm(t).$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $|t-\theta_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(\theta_0)| < \varepsilon$. Luego

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(\theta_0)| \leq \varepsilon \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,dm(t) = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Def'n. Sea $\mu : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ y $\theta_0 \in (0,2\pi)$. La derivada simétrica de μ en θ_0 es el límite finito (si existe)

$$D\mu(\theta_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mu(\theta_0+t) - \mu(\theta_0-t)}{2t}.$$

Es fácil de adaptar a 0 y 2π; si tenemos periodicidad, en lugar de $[0,2\pi]$ consideremos $[-\pi,\pi]$.

Observación. Si $\exists \mu'(\theta_0)$, entonces $\exists D\mu(\theta_0)$ y $D\mu(\theta_0)=\mu'(\theta_0)$:

$$\frac{\mu(\theta_0+t)-\mu(\theta_0-t)}{2t} = \frac{\frac{\mu(\theta_0+t)-\mu(\theta_0)}{t} + \frac{\mu(\theta_0-t)-\mu(\theta_0)}{-t}}{2}$$

$$\to \frac{\mu'(\theta_0)+\mu'(\theta_0)}{2} = \mu'(\theta_0).$$

- El recíproco es falso: sirve como ejemplo cualquier μ discontinua en θ_0 y con la gráfica simétrica en $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$, $\delta>0$.

Teorema de Fatou (1906) – forma débil. Sea $\mu \in BV[0,2\pi]$ y $u\in h^1$; por tanto, $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t)$, $\forall z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$.
Si $\theta_0\in[0,2\pi]$ y $\exists D\mu(\theta_0)$, entonces existe el límite radial

$$u^*(e^{i\theta_0}) = \lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) \text{ y es } = D\mu(\theta_0).$$

Por tanto, $\exists u^*(e^{it})$ en c.t.p. $e^{it}\in\mathbb{T}$.

Dem. $\square$ • Para la última conclusión, basta recordar que $\mu\in BV[0,2\pi]$
$\Rightarrow \exists g,h \nearrow$ en $[0,2\pi]$ t.q. $\mu=g-h \Rightarrow \exists \mu'(t)=g'(t)-h'(t)$ en c.t.p. $t\in[0,2\pi]$.
$t\in[0,2\pi] \Rightarrow \exists D\mu(t)$ en c.t.p.

• Probemos el resto.

Caso $\theta_0=0$: Queremos demostrar que $\lim_{r\to 1^-} u(r) = D\mu(0)$.

Sea $A=D\mu(0)$. (Podemos trabajar con $(-\pi,\pi)$ en lugar de $(0,2\pi)$.)

$$u(r)-A = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{P(r,-t)}_{=P(r,t)}\,d\mu(t) - \int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)A\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\,d\left[\mu(t)-At\right].$$

¡La simetría nos conviene!

Integrando por partes, obtenemos

$$u(r)-A=\frac{1}{2\pi}\,P(r,t)\left[\mu(t)-At\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mu(t)-At\right]\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\,dt.$$

- $P(r,\pi)=P(r,-\pi)=\dfrac{1-r^2}{1+2r+r^2}=\dfrac{1-r}{1+r}\Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi}P(r,t)\left[\mu(t)-At\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r}{1+r}\left[\mu(\pi)-\mu(-\pi)-2A\pi\right]\to 0,\ r\to 1^-.$$

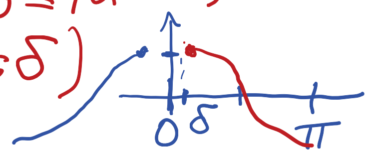
- Podemos escribir $\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mu(t)-At\right]\dfrac{\partial P(r,t)}{\partial t}\,dt$ como

$$\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{0<\delta\le|t|\le\pi},$$ eligiendo δ suficientemente pequeño.

- $$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}=-\frac{2r(1-r^2)\operatorname{sen} t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right|\le\frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta+r^2)^2}$$

(cuando $0<\delta\le|t|\le\pi$, $\cos t\le\cos\delta$)



$\to 0,\ r\to 1^-.\quad\Rightarrow\ \int_{0<\delta\le|t|\le\pi}\to 0,\ r\to 1^-.$

- Nos queda estimar $I_\delta=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}\left[\mu(t)-At\right]\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\,dt.$

$$I_\delta=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\delta+\int_{-\delta}^0\right)$$

La derivada de una función par es impar

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\delta(\mu(t)-At)\frac{\partial P}{\partial t}\,dt+\int_\delta^0(\mu(-t)+At)\frac{\partial P}{\partial t}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\left[\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2t}-A\right]t\left(-\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)dt.$$

$D\mu(0)=A\Rightarrow$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ t.q. $0<|t|\le\delta\Rightarrow$

$$\left|\frac{\mu(t)-\mu(-t)}{2}-A\right|<\varepsilon.\qquad\circledast$$

En $[0,\delta]$, $P(r,t)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ $\downarrow$ con t $\Rightarrow \dfrac{\partial P(r,t)}{\partial t}<0$.

$$(*) \Rightarrow |I_\delta| \le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta t\underbrace{\left(-\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)}_{>0}dt = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} t\left(-\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)dt$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left(-\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)dt$$

Integración por partes

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[-t\,P(r,t)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\,dt\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[-2\pi P(r,\pi) + 2\pi\right]$$

Calculado antes

$$= \varepsilon\left(1-P(r,\pi)\right) = \varepsilon\left(1-\frac{1-r}{1+r}\right)$$

$$= \frac{2r}{1+r}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Conclusión: $\lim\limits_{r\to 1^-} u(r) = A = D\mu(0)$.

<u>Caso general.</u> Sea $\theta_0\in(0,2\pi)$ arbitrario. Si definimos $\to$ (volvemos a $[0,2\pi]$)

$\mu_1(t)=\mu(\theta_0+t)$, vemos que

$$D\mu(\theta_0) = \lim_{t\to 0}\frac{\mu(\theta_0+t)-\mu(\theta_0-t)}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mu_1(t)-\mu_1(-t)}{2t} = D\mu_1(0).$$

Por otra parte,

$$u(re^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta_0-t)\,d\mu(t)$$

(periodicidad)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} P(r,\theta_0-t)\,d\mu(t)$$

cambio de variable (lineal): $\theta_0-t=-s$, $t=\theta_0+s$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,-s)\,d\mu(\theta_0+s)$$

(legítimo para la int. R-S)

PROPIEDAD BÁSICA

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,-s)\,d\mu_1(s)$ $\leftarrow$ por lo ya demostrado

$\to D\mu_1(0) = D\mu(\theta_0)$, $r \to 1^-$. $\boxtimes$

Breve repaso: funciones absolutamente continuas

Son precisamente las que tienen la propiedad $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt$.

Def'n. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a,b]$ si $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ $\forall$ elección de intervalos $[x_k, x_k+h_k]\subseteq[a,b]$ y disjuntos dos a dos,

$$\sum_{k=1}^{n} h_k<\delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(x_k+h_k)-f(x_k)|<\varepsilon.$$

Notación: $f\in AC[a,b]$.

Propiedades. (1) $AC[a,b]\subseteq C[a,b]$ $(n=1)$.

(2) $AC[a,b]\subseteq BV[a,b]$ (Ejercicio fácil).

Por tanto, $f\in AC[a,b] \Rightarrow$ en c.t.p. $x\in[a,b]$ $\exists f'(x)$.

Tma. $\varphi\in L^1[a,b]$, $f(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$, $x\in[a,b] \Rightarrow f\in AC[a,b]$ y $f'(x)=\varphi(x)$, en c.t.p. $x\in[a,b]$.

Tma. $f\in AC[a,b] \Rightarrow f'\in L^1[a,b]$ y $\int_a^x f'(t)\,dt=f(x)-f(a)$, $a\le x\le b$.

(En particular, $f\in AC[a,b]$ y $f'(x)=0$ en c.t.p. $\Rightarrow f\equiv$ cte en $[a,b]$.)

Corolario del Tma. de Fatou.

Si $u=P[\varphi]$, para cierta $\varphi\in L^1[0,2\pi]$: $u(z)=\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\varphi(t)\,dm(t)$,
entonces en c.t.p. $\theta\in[0,2\pi]$, $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})=\varphi(\theta)$.

Dem. $\square$ Sea $\mu(\theta)=\int_0^\theta \varphi(t)\,dt$. $\varphi\in L^1[0,2\pi] \Rightarrow \mu\in AC[0,2\pi]\subseteq BV[0,2\pi]$,
$\mu'(\theta)=\varphi(\theta)$ en c.t.p. de $[0,2\pi] \Rightarrow u(z)=\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\,d\mu(t)$.
Fatou $\Rightarrow$ en c.t.p., $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = D\mu(\theta)=\varphi(\theta)$. $\boxtimes$