(18) J, 15/04/2021

• Continuamos con las propiedades básicas de las funciones $BV[a,b]$.

Recordemos: ⊙ $f,g \in BV[a,b] \Rightarrow f+g \in BV[a,b]$ y, de hecho,

$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ (por la desigualdad triangular).

⊙ $\lambda = cte,\ f \in BV[a,b] \Rightarrow \lambda f \in BV[a,b]$ y $V_a^b(\lambda f) = |\lambda|\, V_a^b(f)$.

⊙ $f,g \in BV[a,b] \Rightarrow fg \in BV[a,b]$ y, de hecho,

$V_a^b(fg) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f)$ (recordando que $f \in BV[a,b] \Rightarrow$ f acotada en $[a,b]$; $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$).

Dem. □ $\left|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})\right| \leq \left|f(x_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)\right| + \left|g(x_{k-1})\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\right|$

$\leq \|f\|_\infty |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \|g\|_\infty |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.

Luego aplicamos $\sum_{k=1}^{n}$ y el $\sup_P$. ☒

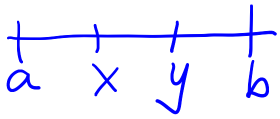
Lema. Si $f \in BV[a,b]$ y definimos $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $V(x) = V_a^x(f)$, entonces:

(1) V es creciente en $[a,b]$.

(2) $U = V - f$ es creciente en $[a,b]$.

Dem. □ (1) $a \leq x < y \leq b \Rightarrow V(y) = V_a^y(f) = V_a^x(f) + V_x^y(f) \geq V_a^x(f) = V(x)$.

(2) $a \leq x < y < b \Rightarrow U(y) - U(x) = [V(y) - f(y)] - [V(x) - f(x)]$



$= V_a^y(f) - V_a^x(f) + f(x) - f(y) = V_x^y(f) + f(x) - f(y) \geq 0$

p.q., por def'n, $V_x^y(f) \geq |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x)$. ☒

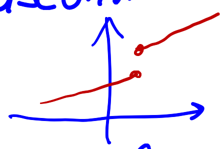
Tma. $f \in BV[a,b] \Leftrightarrow \exists g,h$ crecientes en $[a,b]$ t.q. $f = g - h$.

Dem. □ ($\Leftarrow$): Ya visto antes.

($\Rightarrow$): Podemos tomar $g=V$, $h=U=V-f$; $f=g-h$ y, por el Lema probado, $g, h \nearrow$ en $[a,b]$. ☒

• Obsérvese que el Tma. nos proporciona un algoritmo efectivo para hallar la representación de f como diferencia de dos funciones crecientes: basta calcular $V(x)=V_a^x(f)$. (Hoja 2-A: Ejercicio 32).

Recordemos: $f \nearrow$ en $[a,b] \Rightarrow \forall x_0 \in (a,b)\ \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (finitos). Por tanto, f sólo puede tener saltos como discontinuidades (puntos donde $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$).



Además, el cardinal de los puntos de discontinuidad de f es, como mucho, numerable. También: $\exists f'(x)$ en c.t.p. $x \in [a,b]$ (resp. a la medida de Lebesgue).

Consecuencia: Lo mismo es cierto para toda $f \in BV[a,b]$.

Tma. Sea $f \in BV[a,b]$ y $V:[a,b]\to\mathbb{R}$ como antes: $V(x)=V_a^x(f)$ (entendiendo que $V(a)=0$). Sea $x_0\in[a,b]$. Entonces

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow V$ es continua en x_0.

Corolario. Sea $f\in C[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces $f\in BV[a,b] \Leftrightarrow \exists g,h\in C[a,b]$ t.q. $g,h \nearrow$ en $[a,b]$ y $f=g-h$.

(Omitimos las demostraciones.)

• T. Apostol: Mathematical Analysis, 2ª ed., Cap. 6 (fcnes BV) Cap. 7 (integral R-S). [Def'n de R-S un poco diferente de la nuestra.]

• L.F. Richardson: Advanced Calculus, Wiley-Interscience, 2008. (Cap. 7: BV, R-S). [La misma def'n de R-S.]

Tma. $d(f,g) = |f(a)-g(a)| + V_a^b(f-g)$ define una métrica en el espacio vectorial $BV[a,b]$.

El subespacio $BV_0[a,b] = \{f \in BV[a,b] : f(a) = 0\}$ es completo.

Dem. Ejercicio. (Hoja 2-B ?)

Def'n. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{C}$, $f = u+iv$, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$. Diremos que $f \in BV[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $u,v \in BV[a,b]$.

Si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es una curva, $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$, diremos que es rectificable $\Leftrightarrow \gamma \in BV[a,b]$. Su longitud es

$$\ell(\gamma) = \sup_P \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| = \sup \sum_{k=1}^n \sqrt{[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k)-y(t_{k-1})]^2}$$

Prop. Si γ es C^1 a trozos en $[a,b]$, entonces

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

(una fórmula conocida).

La integral de Riemann–Stieltjes

Es una generalización formal de las típicas integrales $\int_a^b u\,dv$ que conocemos de la fórmula de integración por partes en Cálculo.

Típicamente, pediremos que $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ estén acotadas en $[a,b]$ para hablar de $\int_a^b f\,dg$.

- Para una partición $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y una selección de puntos $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, $1\le k\le n$, escribiremos:

$$\|P\| = \max_{1\le k\le n} |x_k - x_{k-1}| = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{(norma de la partición)}$$

$$S(f,g;P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta g_k.$$

Por definición, si $\exists$ número finito $I(f,g)$ t.q.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq. $\forall$ partición P de $[a,b]$ y $\forall$ elección $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

$$\|P\| < \delta \Rightarrow |S(f,g;P) - I(f,g)| < \varepsilon,$$

diremos que f es integrable respecto a g en el sentido de Riemann-Stieltjes en $[a,b]$ (o f es R-S integrable resp. a g) y llamaremos integral de R-S de f resp. a g al número

$$I(f,g) = \int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f\,dg.$$

Notación: $f \in R(g)$ en $[a,b]$.

(Típicamente, escribiremos que $S(f,g;P) \to I(f,g)$, $\|P\| \to 0$.)

- Caso especial: $g(x) = x$ (la integral de Riemann).

La integral de R-S tiene muchas propiedades que cabe esperar.

Tma. Si $f_1, f_2 \in R(g)$ en $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

a) $f_1 + f_2 \in R(g)$, $\quad \int_a^b (f_1+f_2)\,dg = \int_a^b f_1\,dg + \int_a^b f_2\,dg$.

b) $cf_1 \in R(g)$, $\quad \int_a^b (cf_1)\,dg = c\int_a^b f_1\,dg$.

Tma. Si $f \in R(g_1)$, $f \in R(g_2)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

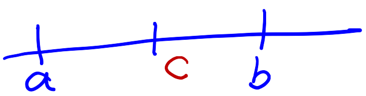
$f \in R(g_1+g_2)$, $\quad \int_a^b f\,d(g_1+g_2) = \int_a^b f\,dg_1 + \int_a^b f\,dg_2$,

$f \in R(cg_1)$, $\quad \int_a^b f\,d(cg_1) = c\int_a^b f\,dg_1$.

Tma. Si $g \equiv$ cte en $[a,b]$, entonces cualquier f acotada es $R(g)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f\,dg = 0$.

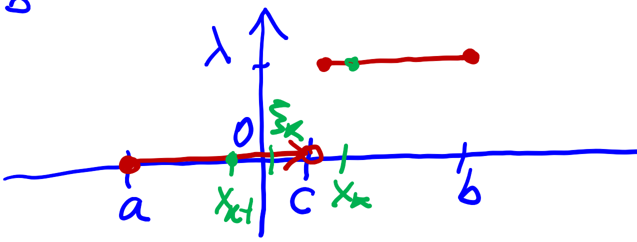
Tma. Si $a < c < b$ y existen las 3 integrales dadas abajo, entonces

$$\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg = \int_a^b f\,dg.$$



• Entendemos (por def'n) que $\int_a^a f\,dg = 0$, $\int_b^a f\,dg = -\int_a^b f\,dg$.

<u>Ejemplo.</u> $f\in C[a,b]$, $g(x)=\begin{cases}0, & a\le x<c\\ \lambda, & c\le x\le b\end{cases} = \lambda\chi_{[c,b]}(x)$; $a<c<b$.



P: partición arbitraria de $[a,b]$.

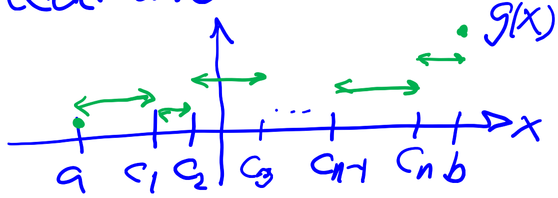
$\Delta g_k = g(x_k)-g(x_{k-1})\neq 0 \iff x_{k-1}<c\le x_k$.

Luego $S(f,g;P) = f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]$

$$\to f(c)\cdot\lambda = f(c)[g(c^+)-g(c^-)] = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

cuando $\|P\|\to 0$. (sólo depende del salto de g en $x=c$)

<u>Generalización.</u> $f\in C[a,b]$, g constante en cada uno de los intervalos $(a,c_1),(c_1,c_2),\dots,(c_{n-1},c_n),(c_n,b)$ $\Rightarrow$



$$\Rightarrow \int_a^b f\,dg = \sum_{k=1}^n f(c_k)[g(c_k^+)-g(c_k^-)] + f(a)[g(a^+)-g(a)] + f(b)[g(b)-g(b^-)].$$

Teoremas de existencia

<u>Tma.</u> $f\in C[a,b], g\in BV[a,b] \Rightarrow f\in R(g)$ en $[a,b]$.

<u>Idea de la demostración.</u> □ Similar a la de la integrabilidad de Riemann de una fcn continua. Las sumas $S(f,g;P)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]$ se acotan inferior y superiormente por las sumas

$$\sum_{k=1}^n (\inf_{[x_{k-1},x_k]} f)[g(x_k)-g(x_{k-1})], \quad \sum_{k=1}^n (\sup_{[x_{k-1},x_k]} f)[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

Por continuidad (uniforme), la diferencia $\to 0$, $\|P\|\to 0$, etc. ☒

<u>Tma. (Reducción a la integral de Riemann).</u> Si f es integrable en el sentido de Riemann en $[a,b]$ y $g\in C^1[a,b]$ (esto es, $g'\in C[a,b]$), entonces $f\in R(g)$ en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

[Aquí la hipótesis sobre g es más fuerte y la hipótesis sobre f, más débil.]

Tma. (Integración por partes). Si existe una de las integrales $\int_a^b f\,dg$, $\int_a^b g\,df$, entonces existe la otra y

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = (fg)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Tma. Si $f, g \in BV[a,b]$ y sus conjuntos de puntos de discontinuidad son disjuntos, entonces $f \in R(g)$ (y $g \in R(f)$, por simetría) en $[a,b]$.

Caso particular. $\forall \mu \in BV[0,2\pi]$, $\forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, tiene sentido la integral R-S: $u(z) = u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, d\mu(t)$.

No sólo es una fcn con valores finitos en todo $\mathbb{D}$. Es, de hecho, armónica en $\mathbb{D}$. (Ejercicio. Explicación: al final de estos apuntes.) Las funciones así definidas se llaman integrales de Poisson-Stieltjes.

Prop. $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$ en $[a,b]$, $g \nearrow$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f\,dg \geq 0$.

$\square$ Basta ver que cada $S(f,g;P) \geq 0$ $\boxtimes$

Prop. $f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g)$.

$\square$ $\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})|$. $\boxtimes$

- Por tanto, si definimos $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) mediante ($g \in BV[a,b]$)

$$F(f) = \int_a^b f\,dg,$$

vemos que es un funcional lineal: $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$, $F(cf) = cF(f)$

y acotado: $|F(f)| \leq V_a^b(g) \cdot \|f\|_\infty$ $(\Rightarrow \|F\| \leq V_a^b(g))$.

Escribimos esto como $F \in C[a,b]^*$ (espacio dual de $C[a,b]$).

• ¿Cuál es exactamente el espacio dual de $C[a,b]$?

Tma. de representación de Riesz (≈1909).

$\forall F \in C[a,b]^*$, $\exists g \in BV_0[a,b]$ (es decir, $g \in BV[a,b]$ y $g(a)=0$) t.q.

$$\forall f \in C[a,b] \quad F(f) = \int_a^b f\,dg \quad y \quad \|F\| = V_a^b(g).$$

• Esta representación no es única. Por ejemplo, si g tiene una discontinuidad en $x_0 \in (a,b)$, el valor $g(x_0)$ no influye en el valor de $\int_a^b f\,dg$, con lo cual $\int_a^b f\,dg_1 = \int_a^b f\,dg_2$ es posible con $g_1 \neq g_2$.

Sin embargo, si pedimos que $g \in BV_0[a,b]$ y que sea continua por la izquierda (o por la derecha), entonces sí será única. Para tales g, escribimos $g \in NBV_0[a,b]$ (N de "normalizada").

($C[a,b]^* = NBV_0[a,b]$)

Convergencia débil-*. Tmas. de Banach-Alaoglu y de Helly

Def'n. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y X^* su espacio dual. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X converge a $x \in X$:

1) fuertemente (o en norma) si $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$;

2) débilmente si $\forall F \in X^*$, $F(x_n) \to F(x)$ (en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, según el caso).

Notación: 1) $x_n \to x$, $n \to \infty$

2) $x_n \xrightarrow{w} x$, $n \to \infty$ (w de "weak") o $x_n \rightharpoonup x$.

Prop. $x_n \to x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$. ($\Leftarrow$: falso)

$\square$ $|F(x_n) - F(x)| \underset{\text{linealidad}}{=} |F(x_n - x)| \underset{\text{acotación}}{\leq} \|F\| \cdot \|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$. $\boxtimes$

• X^* es Banach, luego existen $\to$ y $\xrightarrow{w}$ en X^*.

$F_n \to F$ en X^*: $\|F_n - F\|_{X^*} \to 0$, $n \to \infty$.

$F_n \xrightarrow{w} F$ en X^*: $\forall \phi \in X^{**}$, $\phi(F_n) \to \phi(F)$ en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

En X^* $\exists$ otra topología, más débil que la débil.

Def'n. La topología débil-$*$ en X^* es la topología más débil t.q. $\forall x \in X$ el funcional de evaluación puntual $\Lambda_x : X^* \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$, $\Lambda_x(F) = F(x)$, es continuo en X^*. (Lineal: $\Lambda_x(F+G) = (F+G)(x) = F(x) + G(x) = \Lambda_x(F) + \Lambda_x(G)$, etc.)

(Obsérvese que $\Lambda_x \in X^{**}$).

$\boxed{\text{• Esto significa, para una sucesión } (F_n)_{n=1}^{\infty} \text{ en } X^*, \text{ que } F_n \xrightarrow{w^*} F \iff \forall x \in X,\ \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).}$

• Si $F_0 \in X^*$, un entorno básico de F_0 en la topología w^* es de tipo $U = \{F \in X^* : |F(x_k) - F_0(x_k)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \dots, n\}$, para $\varepsilon > 0$, $x_1, \dots, x_n \in X$. Los abiertos de la topología w^* son uniones arbitrarias de estos conjuntos.

Tma. (Banach-Alaoglu, ≈1938). La bola unidad cerrada de X^*: $\{F \in X^* : \|F\| \le 1\}$ es un conjunto compacto en la topología w^*.

Dicho de otra manera:

$\forall F_n \in X^*$ con $\|F_n\| \le 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\exists F \in X^*$ t.q. $\|F\| \le 1$ y una subsucesión $(F_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ t.q. $\forall x \in X$, $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$.

(Es una consecuencia del Tma de Tijonov/Tychonoff: producto cartesiano de compactos es compacto.)

Una situación especial (e importante).

$X = C[a,b]$, $X^* = NBV_0[a,b] \subseteq BV_0[a,b]$.

$F \in X^* \Rightarrow \forall \varphi \in X = C[a,b]$, $F(\varphi) = \int_a^b \varphi\, d\mu$, $\mu \in BV_0[a,b]$,

$$\|F\| = \|\mu\|_{BV_0[a,b]} = V_a^b(\mu) + \underbrace{|\mu(a)|}_{=0} = V_a^b(\mu).$$

$\mu_n \in BV[a,b]$, $\mu_n(a)=0$ $\quad \exists C>0$ t.q. $\forall t\in[a,b]$ $|\mu_n(t)|\leq C$, $\forall n$
$\exists M>0$ t.q. $V_a^b(\mu_n)\leq M$

$\Rightarrow \exists (\mu_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ t.q. $\forall \varphi\in C[a,b]$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k}(\varphi)=F(\varphi)$, es decir:

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi(t)\,d\mu_{n_k}(t)=\int_a^b \varphi(t)\,d\mu(t)$$

y $\quad \mu_{n_k}(t)\to\mu(t)$, $\forall t\in[a,b]$.

(Este resultado particular es conocido como el Teorema de selección de Helly. Puede demostrarse directamente; basta verlo para $\mu\nearrow$; P.L. Duren, Theory of H^p spaces, Cap. 1).

Pregunta: Si $\mu\in BV[0,2\pi]$ y $u(z)=\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t)$ es una integral de P-S, ¿p.q. $u\in h(\mathbb{D})$?

Respuesta.

$$P(r,\theta-t)=\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}=\operatorname{Re}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}z^n\right\}$$

(visto antes)

serie convergente para $z\in\mathbb{D}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t)=\operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi} d\mu(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,d\mu(t)\,z^n\right\}$$

función en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$:

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{-int}\,d\mu(t)\right|\leq V_0^{2\pi}(\mu) \Rightarrow \text{coeficientes de Taylor acotados}$$

$\Rightarrow$ radio de convergencia ≥ 1.

$\Rightarrow \operatorname{Re}\{\ldots\}\in h(\mathbb{D})$.