Teorema (Smirnov, 1929). Sea $f \in H^1$, con la serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\mathbb{D}$. Sean $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de sus valores frontera $f^*(e^{it})$:

$$c_n = \widehat{f^*}(n) = \int_0^{2\pi} f^*(e^{it})\, e^{-int} \frac{dt}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$c_n = \begin{cases} a_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

Además, el espacio $\mathcal{H}^p$ de los valores frontera de las funciones H^p, $1 \leq p \leq \infty$, es:
$$\mathcal{H}^p = \{\varphi \in L^p(\mathbb{T}) : \forall n < 0,\ c_n = \hat{\varphi}(n) = 0\}.$$

Observación. La hipótesis $f \in H^1$ es relevante (no consideramos H^p con $0 < p < 1$) porque para la existencia de los c_n se requiere la hipótesis $f^* \in L^1(\mathbb{T})$.

Dem. □ • Por la fórmula integral de Cauchy,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{r\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw, \quad \text{donde } r\mathbb{T} = \{z : |z| = r\}.$$

Parametrizando $r\mathbb{T}$ como $w = re^{it}$, $dw = ire^{it}dt$, $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, \cancel{i} re^{it} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^{-n} e^{-int} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi},$$

luego (para $n \geq 0$):

$$|r^n a_n - c_n| = \left| \int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-int} f^*(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}$$

$$\to 0, \quad r \to 1^-,$$

por el Teorema de F. Riesz (con $p=1$). Esto implica que $a_n = c_n$, $\forall n \geq 0$.

Para $n<0$, es fácil ver que

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{-int} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikt} \frac{dt}{2\pi}$$

convergencia uniforme de la serie de Taylor en $r\mathbb{T} = \{z : |z| = r\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} \frac{dt}{2\pi}$$

$$= 0$$

porque $k-n \neq 0$ para $n<0\leq k$ y $\int_0^{2\pi} e^{imt} \frac{dt}{2\pi} = 0$, $\forall m \neq 0$.

Por tanto, tenemos una estimación similar:

$$|c_k| = \left| \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}}_{=0} \right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})| \frac{dt}{2\pi} \to 0, \quad r \to 1^-,$$

así que $c_k = 0$, $\forall k<0$.

Esto nos dice que $\mathcal{H}^p \subseteq \{\varphi \in L^p(\mathbb{T}) ; \forall n<0, \hat{\varphi}(n) = 0\}$.

- Veamos la inclusión recíproca.

Sea $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ tal que $c_n = \hat{\varphi}(n) = 0$, $\forall n<0$. Demostraremos que $\exists f \in H^p$ t.q. $f^* = \varphi$, en c.t.p.

Sea $f = P[\varphi]$, la integral de Poisson de φ:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \varphi(t) dt, \quad \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Recordemos (clase 10) que

$$P(r,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}=1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(e^{int}+e^{-int}\right),$$

así que

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(e^{in(\theta-t)}+e^{-in(\theta-t)}\right)\right]\varphi(t)\,dt$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}+0 \leftarrow \text{al ser los } c_n=0,\ \forall n<0$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

Esto muestra que $f\in H(\mathbb{D})$. Al estar uniformemente acotados todos los coeficientes c_n, con $n\geq 0$:

$$|c_n|=\left|\int_0^{2\pi}\varphi(e^{it})\,e^{-int}\frac{dt}{2\pi}\right|\leq \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})}\quad (\leq \text{de Hölder}),$$

se sigue que $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\leq 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge, al menos, en $\mathbb{D}$.

Teorema enunciado el otro día: $f\in H(\mathbb{D})$; $f=P[\varphi]$, para cierta $\varphi\in L^p(\mathbb{T})$ $(1\leq p\leq\infty) \Leftrightarrow f\in H^p$.

Finalmente, $f^*(e^{it})=\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}=\varphi(t)$, en c.t.p.

$\Rightarrow f\in \mathcal{H}^p$. $\boxtimes$

- Recordemos el Lema de Riemann-Lebesgue: $f\in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \lim_{|n|\to\infty} c_n=0$. Por tanto, obtenemos el siguiente

Corolario. Si $f\in H^1$ y $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\mathbb{D}$, entonces $a_n\to 0$, $n\to\infty$.

Ejemplo. $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty} z^n=f(z)$, $z\in\mathbb{D}$. $\quad f\notin H^1$.

Sin embargo, veremos un poco más adelante que para esta f se tiene que $f \in H^p$, $\forall p<1$.

• A partir de ahora, como es habitual, escribiremos simplemente H^p en lugar de $\mathcal{H}^p$:

$$H^p = \{ f^* \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{(f^*)}(n) = 0, \ \forall n < 0 \}.$$

UNA DESCRIPCIÓN ALTERNATIVA DE H^p, $0<p<\infty$

• Ya sabemos (clase 11) que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (Ω dominio) $\Rightarrow |f|^p$ es subarmónica en Ω, $0<p<\infty$.

Como consecuencia, si $\overline{D}(a;r) \subseteq \Omega$ y $g = |f|^p\big|_{\partial \overline{D}(a;r)}$, $P[g]$ es armónica en $D(a;r)$ y $|f|^p \leq P[g]$ en $\overline{D}(a;r)$. Sin embargo, eso no implica la existencia de una $h \in h(\Omega)$ t.q. $|f|^p \leq h$ en todo Ω.

<u>Def'n</u>. Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $g: \Omega \to \mathbb{R}$. Diremos que g tiene una mayorante armónica en Ω si $\exists U \in h(\Omega)$, $U: \Omega \to \mathbb{R}$, t.q. $\forall z \in \Omega$, $g(z) \leq U(z)$.

<u>Teorema (Smirnov, 1932)</u>. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $0<p<\infty$. Entonces $f \in H^p \Leftrightarrow |f|^p$ tiene una mayorante armónica en $\mathbb{D}$.

• Antes de probar este teorema, necesitamos otro que es muy útil en la teoría de los espacios de Hardy y al que nos referiremos como a la desigualdad logarítmica.

<u>Teorema</u>. Sea $p>0$ y $f \in H^p$. Entonces $\forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$\text{(L)} \qquad \log|f(re^{i\theta})| \leq \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \log|f^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}.$$

Dem. □ • Por la factorización de Riesz, $f=Bg$, donde B es el producto de Blaschke correspondiente a los ceros de f y $g\in H^p$ es tal que $\forall z\in\mathbb{D}$, $g(z)\neq 0$. Entonces

$$\log|f(re^{i\theta})|=\log|B(re^{i\theta})|+\log|g(re^{i\theta})|\leq \log|g(re^{i\theta})|.$$

(si $f(re^{i\theta})=0$, el lado izquierdo es $=-\infty$, siendo la desigualdad trivialmente cierta.) Al mismo tiempo,

$$\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\log|g^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi}=\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\log|f^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi}$$

ya que $|B^*(e^{it})|=1$ en c.t.p. Por tanto, basta demostrar (L) sólo para las $g\in H^p$ tales que $g(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{D}$.

• Sea g una función así. Por el Tma. sobre los dominios simplemente conexos, podemos definir una determinación de $\log g\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces

$$\log|g|=\mathrm{Re}\{\log g\}\in h(\mathbb{D})$$

y, por tanto,

$$(*)\quad \log|g(\rho re^{i\theta})|=\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\log|g(\rho e^{it})|\frac{dt}{2\pi}\,,\qquad 0<\rho<1,$$

por el Tma. de Schwarz sobre el problema de Dirichlet con datos continuos en $\{z:|z|=\rho\}$.

Recordando que $\log x=\log^+x-\log^-x$, por un corolario visto en la clase 16 y por el Lema de Fatou, obtenemos que

$$\log|g(re^{i\theta})|=\lim_{\rho\to1^-}\log|g(\rho re^{i\theta})| \qquad \text{(continuidad de } |g|)$$

$$=\lim_{\rho\to1^-}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\log|g(\rho e^{it})|\frac{dt}{2\pi} \qquad \text{(por } (*))$$

$$\leq \lim_{\rho\to1^-}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\log^+|g(\rho e^{it})|\frac{dt}{2\pi}-\liminf_{\rho\to1^-}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\log^-|g(\rho e^{it})|\frac{dt}{2\pi}$$

$\downarrow$ (Fatou)

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log^+|g^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi} - \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log^-|g^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi}$$

(pq. $f\in H^p \Rightarrow \lim_{\rho\to 1^-}\int_0^{2\pi}\left|\log^+|f(\rho e^{it})| - \log^+|f^*(e^{it})|\right|\frac{dt}{2\pi}=0$)

$$= \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log|g^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi},\quad \text{QED.}\quad \boxtimes$$

- El Tma. es falso para N en lugar de H^p, usando el mismo ejemplo que antes: $f=\frac{1}{S}$.

<u>Dem. del Tma. de Smirnov.</u> $\square$

Supongamos que $|f|^p$ tiene una mayorante armónica, U, en $\mathbb{D}$.

($\Leftarrow$): Supongamos que $|f|^p$ tiene una mayorante armónica, U, en $\mathbb{D}$. Entonces $U\geq 0$ en $\mathbb{D}$ y para todo r con $0\leq r<1$,

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\frac{dt}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} U(re^{it})\frac{dt}{2\pi} = U(0),$$

por la <u>propiedad del valor medio</u>. Por tanto, $f\in H^p$.

($\Rightarrow$): Supongamos que $f\in H^p$. Por el Tma. anterior, obtenemos

$$\log|f(z)| \leq \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log|f^*(e^{it})|\,dm(t),\quad \forall z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$$

$$\Rightarrow\quad |f(z)|^p \leq e^{\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log|f^*(e^{it})|^p dm(t)}$$

$$\leq \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)|f^*(e^{it})|^p\,dm(t)$$ Desigualdad aritmético-geométrica

$$= P[|f^*|^p](z).$$

(Por un resultado visto en la clase anterior, $f\in H^p\Rightarrow f^*\in L^p(\mathbb{T})$ $\Rightarrow |f^*|^p\in L^1(\mathbb{T})$; la integral de Poisson de una función $L^1(\mathbb{T})$ es armónica, así que podemos tomar $U=P[|f^*|^p]$.) $\boxtimes$

• De hecho, podemos ver que la U definida arriba es la menor mayorante armónica posible de $|f|^p$.

Si V es una mayorante armónica arbitraria de $|f|^p$ en $\mathbb{D}$, entonces $\forall z \in \mathbb{D}$, $\forall \rho \in (0,1)$:

$$U(\rho z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)|f(\rho e^{it})|^p dm(t) \le \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) V(\rho e^{it}) dm(t) = V(\rho z)$$

Tma. de Schwarz para $\{z : |z| = \rho\}$

Tomando $\lim\limits_{\rho\to 1^-}$, obtenemos $U(z) \le V(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Corolario. Sea $0<p<\infty$, $f \in H^p$ y $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ t.q. $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces $g = f\circ\varphi \in H^p$ y

$$\|f\circ\varphi\|_{H^p} \le \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p}.$$

Interpretación. ($1\le p<\infty$) Toda auto-aplicación analítica φ de $\mathbb{D}$ (función de la clase de Schur, mencionada antes) define un operador lineal C_φ, llamado operador de composición: $C_\varphi(f) = f\circ\varphi$; φ = símbolo.

El corolario nos dice que $C_\varphi : H^p \to H^p$ es un operador acotado y que su norma $\|C_\varphi\| \le \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Para determinados símbolos φ, la cota obtenida es $= \|C_\varphi\|$, p.ej.: cuando $\varphi(0)=0$ (se tiene la igualdad para $f\equiv 1$: $\|1\circ\varphi\|_p = \|1\|_p$).

También cuando φ es una función interna (hablaremos de ellas más adelante).

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D} : \text{ la norma es esta.}$$

Para los demás casos, no se conoce $\|C_\varphi\|$.

Dem. $\square$ Sea $U = P[|f^*|^p]$:

$$U(z) = U(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,|f^*(e^{it})|^p dm(t), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Por la demostración del Tma. anterior,

$$|f(z)|^p \le U(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Por lo tanto,

$$|f(\varphi(z))|^p \le U(\varphi(z)), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

$(g = f\circ\varphi)$

así que $U\circ\varphi$ es una mayorante armónica de $|f\circ\varphi|^p = |g|^p$, puesto que la composición de una función armónica y otra analítica es armónica. Por el Teorema del valor medio,

$$M_p(r,g) = \left[\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^p\, dm(t)\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\int_0^{2\pi} U(\varphi(re^{it}))\, dm(t)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= U(\varphi(0))^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{2\pi} P(|\varphi(0)|, \theta - t)\, |f^*(e^{it})|^p\, dm(t)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left[\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p\, dm(t)\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \left(P(r,t) \le \frac{1+r}{1-r} : \text{ visto antes} \right)$$

$$= \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p}, \qquad \forall r \in [0,1).$$

Por tanto, $g = f\circ\varphi \in H^p$. Tomando $\lim_{r\to 1^-}$, obtenemos

$$\|f\circ\varphi\|_{H^p} \le \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p}. \quad \boxtimes$$

- La teoría de operadores de composición comenzó a desarrollarse a finales de los años 1960 con los trabajos de Ryff y Nordgren. Tiene mucha relación con la iteración de las autoaplicaciones del disco.

Joel H. Shapiro: Composition Operators and Classical Function Theory, Springer 1993.

Carl C. Cowen, Barbara MacCluer: Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, 1995.

• Antes de proceder con la factorización canónica de las funciones H^p, necesitamos más temas básicos fundamentales. Al igual que para demostrar el Teorema de Fatou, vamos a necesitar bien las medidas complejas bien las integrales de Riemann–Stieltjes. Finalmente, optaremos por este último tema. La referencia principal para esta parte de la teoría de espacios H^p será el libro de Duren.

Repaso: funciones de variación acotada

Def'n. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $-\infty<a<b<\infty$. La variación total de f en $[a,b]$ se define como

$$V_a^b(f)=\sup_P\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones

$P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ de $[a,b]$.

Si $V_a^b(f)<\infty$, se dice que f es una función de variación acotada en $[a,b]$.

Notación: $f\in BV[a,b]$ (BV = bounded variation)

Ejemplos. 1. f monótona en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

2. Si f es Lipschitz en $[a,b]$: $\exists M>0$ t.q. $\forall x\in[a,b]$ $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$, entonces $f\in BV[a,b]$. (En particular, esto sucede si $\exists M>0$ t.q. $\forall x\in[a,b]$, $|f'(x)|\le M$.)

• $f\in BV[a,b]\not\Rightarrow f\in C[a,b]$ (p.ej., una función monótona con discontinuidades).

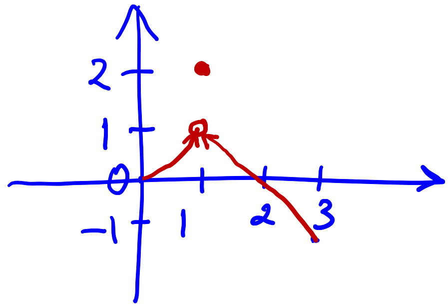
3. $f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. $f\in C[0,1]$ pero $f\notin BV[0,1]$ (ejercicio)

Por tanto, $f\in C[a,b] \not\Rightarrow f\in BV[a,b]$.

Sugerencia: considerar la partición $x_0=0, x_1=\frac{1}{2n}, x_2=\frac{1}{2n-1}, \ldots,$ $x_{2n-1}=\frac{1}{2}, x_{2n}=1$, para ver que $\sum_{k=1}^{2n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to\infty$, $n\to\infty$.

Prop. $a<c<b \Rightarrow V_a^c(f)+V_c^b(f)=V_a^b(f)$.

Ejercicio. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2, & x=1 \\ 2-x, & 1<x\le 3 \end{cases}$



$V_0^1(f)=2,\ V_1^3(f)=3 \Rightarrow V_0^3(f)=2+3=5.$

$V_0^x(f)=?,\ 0\le x\le 3$ (ejercicio)

Prop. a) $f\in BV[a,b] \Rightarrow f$ acotada en $[a,b]$.

b) $f,g\in BV[a,b],\ \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda f,\ f+g\in BV[a,b]$.

Dem. □ a) $x_0=a,\ x_1=x\in(a,b),\ x_2=b \Rightarrow |f(x)-f(a)|\le|f(x)-f(a)|$ $+|f(b)-f(x)|\le V_a^b(f) \Rightarrow |f(x)|\le|f(a)|+V_a^b(f)$.

b) Desigualdad triangular. ⊠

Por tanto, $g, h\nearrow$ (o $\searrow$) en $[a,b] \Rightarrow f=g-h\in BV[a,b]$.

El recíproco también es cierto.