(16) J, 08/04/2021

Más sobre la estructura de las funciones H^p

- Ya sabemos que, para $f\in H(\mathbb{D})$, $f\in N \Leftrightarrow \exists g,h\in H^\infty$ t.q. $f=\frac{g}{h}$. En la última clase vimos que este resultado de F. y R. Nevanlinna, junto con el Teorema de Fatou sobre la existencia de límites radiales (cuya prueba se pospone hasta más adelante), además del Teorema de unicidad de los valores frontera (clase 13) para las funciones H^∞, tiene como consecuencia la existencia en c.t.p. de los límites radiales, f^*, para toda $f\in N$ y, por tanto, $\forall f\in H^p$, $0<p<\infty$.
- Es fácil ver que la integrabilidad de $\log|f^*|$ para toda $f\in H^\infty$ $(f\neq 0)$ se extiende también a la clase N y, por tanto, a cualquier espacio H^p, $0<p<\infty$.

Corolario. Si $f\in N$ y $f\not\equiv 0$, entonces $\log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$.

Dem. $\square$ Trivial, gracias a la cantidad de información que tenemos: $f\in N, f\not\equiv 0 \Rightarrow \exists g,h\in H^\infty$ t.q. $f=\frac{g}{h}$ en $\mathbb{D}$ $\Rightarrow f^*=\frac{g^*}{h^*}$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ $\Rightarrow \log|f^*|=\log|g^*|-\log|h^*|$, en c.t.p. de $\mathbb{T}$,

$\log|g^*|, \log|h^*|\in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$. $\boxtimes$

- Obtendremos ahora más información acerca de f^* y su relación con f cuando, en lugar de pertenecer a N, f cumple una condición más fuerte: $f\in H^p$, $0<p<\infty$. Estos resultados también datan de 1923 y se deben a Riesz. Nos servirán como una buena ilustración del uso de su técnica de factorización, mencionada en la clase 15.

Primero necesitamos un resultado técnico sobre la convergencia en norma en el espacio $L^p(\mu)$ cuando no se dispone de una dominante integrable ni de monotonía de los integrandos.

Lema (F. Riesz). Sea (X,μ) un espacio de medida (positiva), $0<p<\infty$ y $f, f_n \in L^p(X,\mu)$. Si $f_n \to f$ en μ-c.t.p. y $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, $n\to\infty$, entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$, $n \to \infty$.

Dem. (Pratt, Novinger). □ Es fácil ver que $a,b \geq 0$, $0<p<\infty \Rightarrow$ $(a+b)^p \leq (2\max\{a,b\})^p \leq 2^p(a^p+b^p)$. Por tanto,

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n|+|f|)^p \leq 2^p(|f_n|^p+|f|^p) \Rightarrow$$

$$2^p(|f_n|^p+|f|^p) - |f_n-f|^p \geq 0.$$

Las funciones que aparecen en el lado izquierdo de la última desigualdad son todas μ-medibles y

$$2^p(|f_n|^p+|f|^p) - |f_n-f|^p \longrightarrow 2^{p+1}|f|^p, \text{ en } \mu\text{-c.t.p, } n\to\infty.$$

Lema de Fatou $\Rightarrow$

$$2^{p+1}\int_X |f|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \left[2^p(|f_n|^p+|f|^p) - |f_n-f|^p\right] d\mu$$

$$= 2^{p+1}\int_X |f|^p d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p d\mu$$

(Por hipótesis, $\int_X |f_n|^p d\mu \to \int_X |f|^p d\mu$)

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu \leq 0$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0, \ n\to\infty. \qquad \boxtimes$$

Ya sabemos de antes que si $0<p<\infty$ y $f\in H^p$, entonces

- $\|f\|_{H^p}^p = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dm(t)$,
- $\exists f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$, en c.t.p. $e^{it}\in\mathbb{T}$,
- $f^*\in L^p(\mathbb{T})$ y $\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p dm(t) \le \|f\|_{H^p}^p$ (clase 15).

Ahora veremos que es cierto aún más.

<u>Teorema (F. Riesz, 1923).</u> Sea $0<p<\infty$ y $f\in H^p$. Entonces

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dm(t) = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p dm(t). \qquad \text{(L)}$$

De hecho, es cierto más:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f^*(e^{it})|^p dm(t) = 0. \qquad \text{(N)}$$

- Es claro que (N) $\Rightarrow$ (L) por la desigualdad triangular en el espacio $L^p([0,2\pi], dm)$. (L): <u>convergencia en media</u> a f^*.

<u>Dem.</u> $\Box$ Usaremos la técnica de factorización de Riesz, con sus tres pasos típicos.

(1) Caso $p=2$. Sea $f\in H^2$, con serie de Taylor $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ en $\mathbb{D}$. Como sabemos, $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2 < \infty$. Por el <u>Lema de Fatou</u>,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f^*(e^{it})|^2 dm(t) \le \liminf_{\rho\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(\rho e^{it})|^2 dm(t)$$

$$= \liminf_{\rho\to 1^-} \int_0^{2\pi} \Big|\sum_{n=0}^\infty (r^n-\rho^n) a_n e^{int}\Big|^2 dm(t) = \liminf_{\rho\to 1^-} \sum_{n=0}^\infty (r^n-\rho^n)^2 |a_n|^2 \quad \text{(cálculo visto antes)}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (1-r^n)^2 |a_n|^2 \to 0,\ r\to 1^-,$$

(serie positiva)

lo cual prueba (N) y, por tanto, (L), para $p=2$.

(2) Si $g\in H^p$, $g(z)\neq 0, \forall z\in\mathbb{D}$, entonces podemos definir $g^{p/2}$ como función holomorfa en $\mathbb{D}$; $g^{p/2}\in H^2$.

Por el paso (1) ya completado, obtenemos

$$\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^p dm(t) = \int_0^{2\pi}|g^{p/2}(re^{it})|^2 dm(t)$$

$$\to \int_0^{2\pi}|g^*(e^{it})|^p dm(t) \quad , \quad r\to 1^-,$$

lo cual es (L).

(3) Para $f\in H^p$, una función arbitraria, $f=Bg$, donde B es el producto de Blaschke correspondiente a los ceros de f y $g\in H^p$, con $g(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{D}$. Entonces

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dm(t) = \int_0^{2\pi}|B(re^{it})|^p|g(re^{it})|^p dm(t) \leq \int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^p dm(t)$$

y

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^p dm(t) = \int_0^{2\pi}|g^*(e^{it})|^p dm(t) \leftarrow \text{(ya probado en el paso (2))}$$

$$= \int_0^{2\pi}|f^*(e^{it})|^p dm(t) \leftarrow \text{(p.q. } |B^*(e^{it})|=1 \text{ en c.t.p.)}$$

Por tanto,

$$\limsup_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dm(t) \leq \int_0^{2\pi}|f^*(e^{it})|^p dm(t)$$

En la clase 15 ya vimos, usando el Lema de Fatou, que

$$\int_0^{2\pi}|f^*(e^{it})|^p dm(t) \leq \liminf_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dm(t).$$

Se sigue que

$$\int_0^{2\pi}|f^*(e^{it})|^p dm(t) = \lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dm(t)$$

$$= \|f\|_{H^p}^p \quad \text{(como ya sabemos)}.$$

Queda probado (L) en todos los casos. Aplicando el Lema de Riesz, se sigue (N). $\boxtimes$

Corolario. Si $0<p<\infty$ y $f\in H^p$, entonces

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left| \log^+|f(re^{it})| - \log^+|f^*(e^{it})| \right| dm(t) = 0$$

y, por tanto, $\displaystyle \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{it})|\,dm(t) = \int_0^{2\pi} \log^+|f^*(e^{it})|\,dm(t).$

Dem. $\square$ Se sigue de la siguiente estimación elemental:

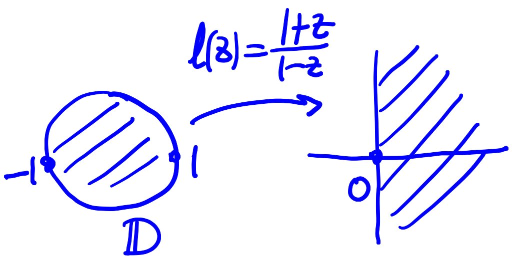
$$a,b\geq 0,\ 0<p\leq 1 \Rightarrow \left|\log^+a - \log^+b\right| \leq \frac{1}{p}|a-b|^p.$$

Teniendo el resultado para $p=1$, es fácil deducirlo para cualquier $p\in(1,\infty)$, porque para una medida normalizada,

$$\|u\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p}. \quad \boxtimes$$

Ejemplo. (El Corolario es falso para la clase N)

Sea $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}} = \dfrac{1}{S(z)}$, cociente de dos funciones $H^\infty \Rightarrow f\in N$.



$|f^*(z)|=1$ en c.t.p. z con $|z|=1$ (clase B)

$\Rightarrow \log^+|f^*(e^{it})|=0$ en c.t.p.

$\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}>0,\ \forall z\in\mathbb{D} \Rightarrow |f(z)| = e^{\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}} > 1$

$$\Rightarrow \log^+|f(z)| = \log|f(z)| = \operatorname{Re}\{\log f(z)\} = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-\bar z}{1-\bar z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$= P(r,t)$, $\forall z = re^{it}\in\mathbb{D}$ (visto antes)

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \left|\log^+|f(e^{it})| - \log^+|f^*(e^{it})|\right| dm(t) = \int_0^{2\pi} P(r,t)\,dm(t) = 1 \not\to 0,$$

$r\to 1^-$.

- Con la teoría desarrollada hasta ahora, ya sabemos que la norma H^p se puede calcular de varias maneras:

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dm(t) = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dm(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p dm(t) = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}^p, \quad 1\le p<\infty,$$

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = \sup_{0\le t\le 2\pi} \operatorname{ess} |f^*(e^{it})|.$$

(Cuando $0<p<1$, seguimos usando la notación $\|f\|_p$, como en $L^p(\mu)$, aunque no es una norma. Sabemos que $d_p(f,g)=\|f-g\|_p^p$ define una métrica completa e invariante por traslaciones: $d_p(f-h,g-h)=d_p(f,g)$.)

- Aún tenemos que caracterizar H^p visto como subespacio de $L^p(\mathbb{T})$, para $1\le p<\infty$, algo que ya hicimos para $p=\infty$ (clase 12). Veremos luego que la caracterización (en términos de los coeficientes de Fourier) es la misma para $p\in[1,\infty)$.
- Recordemos (clase 10): $P(r,t)=P_r(t)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$, núcleo de Poisson; $dm(t)=\dfrac{dt}{2\pi}$. $\int_0^{2\pi} P(r,t)dm(t)=1$.

  $\varphi\in L^1(\mathbb{T})$. <u>Integral de Poisson</u> de φ: $P[\varphi]$, donde

$$P[\varphi](re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(r,t-\theta)\varphi(t)dm(t) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\varphi(t)dm(t).$$

El siguiente teorema se debe, esencialmente, a F. y M. Riesz y es de 1916.

<u>Teorema</u>. Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces $f\in H^1 \iff \exists\varphi\in L^1(\mathbb{T})$ t.q. $f=P[\varphi]$.
En ese caso, $\varphi=f^*$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

<u>Dem.</u> $\square$ $(\Leftarrow)$: Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f=P[\varphi]$ para cierta $\varphi\in L^1(\mathbb{T})$.

Entonces
$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|dm(\theta) = \int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,\varphi(t)dm(t)\right|dm(\theta)$$
$$\le \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,|\varphi(t)|dm(t)\,dm(\theta)$$
$$= \int_0^{2\pi}\Big[\underbrace{\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)dm(\theta)}_{=1}\Big]|\varphi(t)|dm(t)$$

(Tma. de Fubini)

$$= \int_0^{2\pi} |\varphi(t)|\,dm(t) = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T})} < \infty,$$

$\forall r \in [0,1)$, luego $f \in H^1$.

$(\Rightarrow)$: Sea $f \in H^1$. Entonces $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe (y es finito) en c.t.p. $e^{it} \in \mathbb{T}$ y $f^* \in L^1(\mathbb{T})$. Sea

$$F(z) = P[f^*] = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) f^*(e^{it})\,dm(t).$$

$\forall \rho \in (0,1)$ fijo,

$$f(\rho z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) f(\rho e^{it})\,dm(t),$$

según el Tma. de Schwarz (solución del problema de Dirichlet con datos continuos), aplicado a $f \in h(D(0;\rho)) \cap C(\overline{D}(0;\rho))$.

El caso $p=1$ del Tma. de F. Riesz (acerca de la convergencia en media a los valores frontera) implica que

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - f^*(e^{it})|\,dm(t) \to 0, \quad \rho \to 1^-,$$

luego

$$|f(\rho z) - F(z)| = \left| \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,[f(\rho e^{it}) - f^*(e^{it})]\,dm(t) \right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,|f(\rho e^{it}) - f^*(e^{it})|\,dm(t)$$

$$\leq \frac{1+r}{1-r} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - f^*(e^{it})|\,dm(t) \to 0, \quad \rho \to 1^-.$$

$$\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r} \right]$$

$(\forall z = re^{it} \in \mathbb{D}$ fijo$)$.

Por tanto, $F(z) = \lim_{\rho\to 1^-} f(\rho z) = f(z)$, así que

$f = P[f^*]$. $\boxtimes$

- Este resultado puede extenderse a otros H^p, por ejemplo, usando la factorización canónica (que veremos más adelante). No probaremos este corolario.

<u>Teorema</u>. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in H(\mathbb{D})$. Entonces $f \in H^p \iff \exists \varphi \in L^p(\mathbb{T})$ t.q. $f = P[\varphi]$.

Descripción de los valores frontera

Sea $\mathcal{H}^p$ el conjunto de las funciones frontera $f^*(e^{it})=\lim\limits_{r\to 1^-} f(re^{it})$, para $f\in H^p$. Más precisamente, $\mathcal{H}^p$ será el conjunto de las clases de equivalencia, identificando dos funciones si coinciden en c.t.p. de $\mathbb{T}$. Sabemos que $\mathcal{H}^p\subseteq L^p(\mathbb{T})$. Es fácil ver que $\mathcal{H}^p$ es un espacio vectorial. Es obvio que $\forall k\in\{0,1,2,\dots\}$, $e_k\in\mathcal{H}^p$, donde $e_k(t)=e^{ikt}$. Por tanto, todo polinomio trigonométrico: $\sum_{k=0}^{n} a_k e_k(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}\in\mathcal{H}^p$.

Veremos ahora que $\mathcal{H}^p$ es cerrado y los polinomios de e^{it} son densos en él, para $0<p<\infty$.

Teorema. Sea $0<p<\infty$. Entonces $\mathcal{H}^p$ es el cierre de los polinomios trigonométricos en $L^p(\mathbb{T})$.

Dem. $\square$ Consideremos las dilataciones: $f_r(z)=f(rz)$, $0<r<1$, $z\in\mathbb{D}$. Dada una $f^*\in\mathcal{H}^p$, proveniente de $f\in H^p$, por el Tma. de F. Riesz,

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})-f^*(e^{it})|^p\,dm(t)=0,$$

así que, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, r\in(0,1)$ t.q.

$$\|f_r-f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ la suma parcial n-ésima de la serie de Taylor de f en $\mathbb{D}$. En $\{z:|z|=r\}\Subset\mathbb{D}$, $P_n\rightrightarrows f$ y, por tanto,

$$\|(P_n)_r-f_r\|^p_{L^p(\mathbb{T})}=\int_0^{2\pi}|P_n(re^{it})-f(re^{it})|^p\,dm(t)\longrightarrow 0,\quad n\to\infty.$$

Luego $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq N$, $\|(P_n)_r-f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Desigualdad triangular (Minkowski), para $1\leq p<\infty$ $\Rightarrow$

$$\|(P_n)_r-f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}\leq\|(P_n)_r-f_r\|_{L^p}+\|f_r-f^*\|_{L^p}<\varepsilon,\quad \forall n\geq N,$$

y el resultado se sigue en este caso.

$0<p<1,\ a,b\geq 0 \Rightarrow (a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p) \Rightarrow$

$$\|(P_n)_r - f^*\|_{L^p}^p \leq 2^p\left(\|(P_n)_r - f_r\|_{L^p}^p + \|f_r - f^*\|_{L^p}^p\right) < 2^p\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\cdot 2 = 2\varepsilon^p$$

y se sigue lo mismo.

Esto prueba que $\forall p\in(0,\infty)$, $\mathcal{H}^p \subseteq \overline{\{\text{polinomios trigonométricos}\}}$ (en $L^p(\mathbb{T})$), sólo queda comprobar que $\mathcal{H}^p$ es cerrado en $L^p(\mathbb{T})$. Para ello, usamos la estimación puntual asignada como ejercicio:

$$\forall f\in H^p, \forall z\in\mathbb{D}, \quad |f(z)| \leq \frac{\|f\|_{H^p}}{(1-|z|^2)^{1/p}}$$

y familias normales.

Sean $f_n^*\in\mathcal{H}^p$, $f_n^*\longrightarrow\varphi$ en la norma de $L^p(\mathbb{T})$. Entonces (f_n) es una sucesión acotada en $L^p(\mathbb{T})$: $\exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \|f_n^*\|_{L^p}\leq M$.

Pero $\|f_n^*\|_{L^p} = \|f_n\|_{H^p}$ (ya visto antes) $\Rightarrow \|f_n\|_{H^p}\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$K\Subset\mathbb{D} \Rightarrow \exists R\in(0,1)$ t.q. $K\subseteq\overline{D}(0;R) \Rightarrow$

$$|f_n(z)| \leq \frac{\|f_n\|_{H^p}}{(1-|z|^2)^{1/p}} \leq \frac{M}{(1-R^2)^{1/p}}.$$

Teorema de Montel $\Rightarrow \exists$ subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ t.q., para cierta $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f_{n_k} \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\forall K\Subset\mathbb{D}$.

Hemos de probar que $f^*(e^{it}) = \varphi(e^{it})$, en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

$(f_n^*)_n$ es convergente a φ en $L^p(\mathbb{T}) \Rightarrow (f_n^*)_n$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{T})$:

Dado $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n\geq N \Rightarrow \|f_m^* - f_n^*\|_{L^p}<\varepsilon$.

(Recordemos: $M_p(r,f) = \left[\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dm(t)\right]^{1/p} \nearrow \|f\|_{H^p}$, $r\to 1^-$.)

Luego $\forall r\in(0,1)$, $\forall m\geq N$:

$$M_p(r, f-f_m) = \lim_{k\to\infty} M_p(r, f_{n_k}-f_m)$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \|f_{n_k}-f_m\|_{H^p}$$
$$= \limsup_{k\to\infty} \|f_{n_k}^*-f_m^*\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

$r\to 1^- \Rightarrow$
$$\|f-f_m\|_{H^p} = \lim_{r\to 1^-} M_p(r, f-f_m) \leq \varepsilon, \quad \forall m\geq N.$$

Conclusión: $f_m \to f$ en $H^p \Rightarrow f_m^* \to f^*$ en $\mathcal{H}^p \Rightarrow f^* = \varphi$. $\boxtimes$

• Un razonamiento similar demuestra que $\mathcal{H}^\infty$ es cerrado. Sin embargo, los polinomios <u>no</u> son densos en dicho espacio.

<u>Ejemplo.</u> Sea $S(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$, $S\in H^\infty$ (visto antes) y
$$S^*(e^{it}) = e^{\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}} = e^{\frac{e^{-it}-e^{it}}{2-2\cos t}} = e^{-i\frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}}$$
$$= e^{-i\frac{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}} = e^{-i\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}, \quad t\neq 0.$$

Pero $S\notin C(\mathbb{T}) \Rightarrow S\notin \overline{\{\text{polin. trig.}\}}_{L^p(\mathbb{T})}$ (<u>Tma. de aproximación de Weierstrass</u>).

• Ahora ya estamos en condiciones de caracterizar $\mathcal{H}^p$ como un subespacio fácilmente identificable de $L^p(\mathbb{T})$, para $1\leq p\leq\infty$. Lo haremos próximamente, demostrando el Teorema de Smirnov.