(15) M, 06/04/2021

Factorización de Riesz

• El otro día demostramos que si $f\in N$, $f\not\equiv 0$ y B es el producto de Blaschke que tiene los mismos ceros que f, entonces $\|\frac{f}{B}\|_0=\|f\|_0$. Además, si $f\in H^p$, entonces $\frac{f}{B}\in H^p$ y $\|\frac{f}{B}\|_p=\|f\|_p$. Este hecho tiene consecuencias importantes.

Teorema (F. Riesz, 1923). Si $0<p<\infty$, $f\in H^p$, $f\not\equiv 0$ y B es el producto de Blaschke que tiene los mismos ceros que f, entonces $\exists h\in H^2$ sin ceros en $\mathbb{D}$ tal que $f=B\cdot h^{2/p}$.

Por consiguiente, toda $f\in H^1$ puede escribirse como $f=gh$, con $g,h\in H^2$.

Dem. $\square$ Sea $g=\frac{f}{B}$. Sabemos que $g\in H^p$ y $\|g\|_p=\|f\|_p$. El disco es simplemente conexo y g no tiene ceros en $\mathbb{D}$ $\Rightarrow \exists F\in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tq. $e^F=\frac{f}{B}$. Sea $h=e^{pF/2}$. Entonces $h\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y

$$|h|^2=|e^{pF}|=|e^F|^p=|g|^p;\quad g\in H^p\Rightarrow h\in H^2.$$

Obviamente,

$$\|f\|_{H^2}^2=\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\frac{dt}{2\pi}=\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|h(re^{it})|^p\frac{dt}{2\pi}=\|h\|_{H^p}^p.$$

Si $f\in H^1$, entonces $f=Bh^2=(Bh)\cdot h$, $h\in H^2$, $Bh\in H^2$. $\boxtimes$

• Este resultado nos permite demostrar varios resultados acerca de los espacios H^p, siguiendo el esquema que se indica a continuación (conocido como técnica de factorización de Riesz). y que usaremos a veces

Paso 1): Se prueba el resultado en el caso especial $p=2$, usando la fórmula para la norma $\|f\|_2^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$.

Paso 2): Se prueba el mismo resultado para las $g\in H^p$ con $g(z)\neq 0$ $\forall z\in\mathbb{D}$, aprovechando que $g^{p/2}\in H^2$, siendo $\|g\|_p^p=\|g^{p/2}\|_2^2$.

Paso 3): Finalmente se demuestra el resultado para las $f\in H^p$ arbitrarias, usando que $f=Bg$, $g\in H^p$, $g(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{D}$ y $|B|\le 1$,

$|B^*|=1$ en c.t.p.

• Ejercicio. Ya sabemos que $\forall f\in H^2, \forall \zeta\in\mathbb{D}$, $|f(\zeta)|\le \dfrac{\|f\|_{H^2}}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}}$ y sabemos cuáles son las funciones extremales (clase 9).
Usar la técnica de factorización de Riesz, completando los pasos 2) y 3) arriba indicados para deducir que
$$\forall f\in H^p, \forall \zeta\in\mathbb{D},\quad |f(\zeta)|\le \frac{\|f\|_{H^p}}{(1-|\zeta|^2)^{1/p}}$$
(HOJA 2)

y determinar las funciones extremales.

• Nuestro objetivo es seguir desarrollando la teoría de los espacios de Hardy. Eso incluye una mejor comprensión de la factorización y de los valores frontera f^* de una $f\in H^p$.

• Ya vimos antes (clase 13) que $f\in H^\infty, f\neq 0 \Rightarrow \log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$ y, por tanto, $f^*(e^{it})\neq 0$, en c.t.p. $e^{it}\in\mathbb{T}$.

Proposición. Si $p>0$ y $f\in H^p$, entonces $f^*\in L^p(\mathbb{T})$, respecto a la medida habitual $dm(t)=\frac{dt}{2\pi}$.

Dem. □
$$\int_0^{2\pi}|f^*(e^{it})|^p\,dm(t)=\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 1^-}|f(re^{it})|^p\,dm(t)$$
$$\le \liminf_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dm(t)$$
(Lema de Fatou)
$$\le \|f\|^p_{H^p}. \quad \boxtimes$$

• Para demostrar que $f\in N, f\neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})=f^*(e^{it})$ en c.t.p. $e^{it}\in\mathbb{T}$ y $\log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$, extendiendo así el resultado citado arriba, tenemos que probar el Tma. de F. y R. Nevanlinna sobre la estructura de las funciones en N:
$$\forall f\in N\ \exists g,h\in H^\infty \text{ t.q. } f=\frac{g}{h}.$$
Existen varias maneras de demostrar este resultado pero cada una de ellas requiere recorrer un cierto itinerario (no trivial). Veamos una prueba que exige un pequeño repaso.

REPASO: Familias normales

Ya sabemos que el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio), provisto de la topología compacta-abierta ($f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $\forall K \Subset \Omega$), es metrizable.

- <u>Pregunta</u>: ¿cómo describir la compacidad (o compacidad relativa = precompacidad) en este espacio métrico?

<u>Terminología</u>. En Variable Compleja, sigue usándose la terminología clásica, que es anterior a la definición dada por M. Fréchet de un espacio métrico (≈ 1900) o de un espacio topológico (1903):

conjunto precompacto = familia normal
conjunto cerrado = familia compacta.

<u>Def'n</u>. Una <u>familia normal</u> en $\mathcal{H}(\Omega)$ es un conjunto relativamente compacto en la topología compacta-abierta. En otras palabras, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ es <u>normal</u> si y sólo si toda sucesión en $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de Ω.

- Aparentemente, esto admite dos interpretaciones:

(1) $\forall (f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$, $\exists (f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ t.q. $\forall K \Subset \Omega$, $f_{n_k} \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $k \to \infty$;

(2) $\forall K \Subset \Omega$, $\forall (f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$, $\exists (f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ t.q. $f_{n_k} \underset{K}{\rightrightarrows} f$, $k \to \infty$.

- Obviamente, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (Weierstrass) y (1) $\Rightarrow$ (2). ¿Cuál de las interpretaciones (1), (2) debemos elegir?

<u>Respuesta</u>: ¡Da lo mismo! Porque (2) $\Rightarrow$ (1) también.

Razonamos así para comprobar esta afirmación. Tomamos, como antes, un agotamiento de Ω por compactos (clase 7): $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \operatorname{Int}(K_{n+1})$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

Si (2) se satisface, podemos extraer de la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión uniformemente convergente en K_1:

$$f_{n_1}^{(1)},\ f_{n_2}^{(1)},\ f_{n_3}^{(1)},\ \dots \overrightarrow{\underset{K_1}{\rightarrow}} f.$$

Después, de la sucesión $(f_{n_k}^{(1)})_k$ extraemos una subsucesión

$$f_{n_1}^{(2)},\ f_{n_2}^{(2)},\ f_{n_3}^{(3)},\ \dots \overrightarrow{\underset{K_2}{\rightarrow}} f \quad (\text{también})$$

Luego extraemos otra de la sucesión $(f_{n_k}^{(2)})_k$:

$$f_{n_1}^{(3)},\ f_{n_2}^{(3)},\ f_{n_3}^{(3)},\ \dots \overrightarrow{\underset{K_3}{\rightarrow}} f, \qquad \text{etc.}$$

Formando la subsucesión diagonal:

$g_1 = f_{n_1}^{(1)},\ g_2 = f_{n_2}^{(2)},\ g_3 = f_{n_3}^{(3)}, \dots,$ vemos que también es una subsucesión de la sucesión inicial, $(f_n)_n$ y que $g_n \overrightarrow{\underset{K}{\rightarrow}} f$, $\forall K \in \Omega$, puesto que $\forall K \in \Omega\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $K \subseteq K_N \Rightarrow \forall n \geq N,\ K \subseteq K_n$, etc.

- Conocemos sobradamente la descripción de la compacidad en $\mathbb{R}^N$ (Teorema de Heine-Borel):

$K \subseteq \mathbb{R}^N$ es compacto $\Leftrightarrow$ K es cerrado y acotado.

Por tanto, $K \subseteq \mathbb{R}^N$ es precompacto (es decir, $\bar{K}$ es compacto) $\Leftrightarrow$ K es acotado.

- En $C[a,b]$ también sabemos describir los precompactos (Teorema de Ascoli-Arzelà):

$\mathcal{F} \subseteq C[a,b]$ es una familia precompacta $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ es equicontinua y uniformemente acotada.

- ¿Cuál es la situación en $\mathcal{H}(\Omega)$? Basta con una condición.

<u>Def'n</u>. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. Se dice que la familia $\mathcal{F}$ es <u>localmente acotada</u> si y sólo si $\forall K \in \Omega\ \exists M = M_K$ tq. $\forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in K, |f(z)| \leq M$.

<u>Teorema (Montel, ≈1905)</u>. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia normal $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ es localmente acotada.

Idea de la demostración. Fórmula integral de Cauchy (para f y para f'), equicontinuidad.

Ejemplos. (1) $\mathcal{F}=\{f_{a,b}(z)=az+b : a,b\in\mathbb{D}\}\subseteq\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es normal: $\forall K\Subset\mathbb{C}$, $\exists R>0$ t.q. $\forall z\in K$, $|z|\leq R \Rightarrow \forall z\in K$, $|f_{a,b}(z)|\leq |a||z|+|b|\leq R+1$.

(2) La bola unidad de H^2, $\{f\in H^2 : \|f\|_2\leq 1\}$, es una familia normal en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$:

$K\Subset\mathbb{D}\Rightarrow\exists r\in(0,1)$ t.q. $K\subseteq\overline{D}(0;r)\Rightarrow\forall z\in K$, $|z|\leq r<1\Rightarrow\forall f\in H^2$ con $\|f\|_2\leq 1$, $\forall z\in K$: $|f(z)|\leq\dfrac{\|f\|_{H^2}}{(1-|z|^2)^{1/2}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}$.

- $\{f\in H^2 : \|f\|_2\leq 1\}$ tb. es un conjunto cerrado de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (en la terminología antigua, una familia compacta. Por tanto, la bola de H^2 es un subconjunto compacto del espacio métrico $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, aunque no es un subconjunto compacto de H^2. (Ejercicio.)

Fórmula de Poisson-Jensen

Recordemos que el núcleo de Poisson para el disco unidad $\mathbb{D}=D(0;1)$ es

$$P(r,t)=\frac{1-r^2}{1-2\cos t\cdot r+r^2},\quad 0\leq r<1,\ 0\leq t\leq 2\pi.$$

(También: $P_r(t)$) Aquí no conviene

Para un disco más general, $D(0;\rho)$:

$$P_\rho(r,t)=P\left(\tfrac{r}{\rho},t\right)=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos t+r^2},\quad 0\leq r<\rho,\ 0\leq t\leq 2\pi.$$

$\frac{r}{\rho}<1$

- Si $f\in\mathcal{H}(D(0;1+\varepsilon))$, $f=u+iv$ y $u=g$ en $\mathbb{T}=\{z : |z|=1\}$, g función con valores reales, entonces $\forall z=re^{i\theta}$ con $|z|=r\leq 1$:

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{it})P(r,\theta-t)\,dt$$

(por el Teorema de Schwarz - clase 10) y, completando u analíticamente,

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt+iC,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Generalizando a $f\in\mathcal{H}(D(0;\rho+\varepsilon))$, $\varepsilon>0$, $f=u+iv$, $u=g$ en $\{z:|z|=\rho\}$, con valores reales, obtenemos

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\int_0^{2\pi} g(\rho e^{it})\,P_\rho(r,\theta-t)\,\frac{dt}{2\pi},\qquad z=re^{i\theta},\ |z|=r\le\rho,$$

$$\boxed{f(z)=f(re^{i\theta})=\int_0^{2\pi} g(\rho e^{it})\,\frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}\,\frac{dt}{2\pi}+iC,\quad C\in\mathbb{R}.}$$

Fórmula de Poisson–Jensen.

Más sobre la estructura de las funciones en N y H^p

Ahora ya podemos demostrar el siguiente resultado fundamental, que tendrá otras consecuencias importantes.

Teorema (F. y R. Nevanlinna, 1922). Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces

$$f\in N \iff \exists\,\varphi,\psi\in H^\infty \text{ t.q. } f=\frac{\varphi}{\psi}.$$

Dem. $\square$ ($\Leftarrow$): Sea $f=\frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi,\psi\in H^\infty$, $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces los ceros de ψ se cancelan con los de φ (los de φ tienen la misma multiplicidad o una mayor que los de ψ). Nos referimos al caso $f\not\equiv 0$ (p.q. si $f\equiv 0$, entonces $\log^+|f|\equiv 0\Rightarrow f\in N$), cuando los ceros son aislados. Cancelando los factores z^k, podemos suponer que $\psi(0)\neq 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|\varphi|\le 1$ en $\mathbb{D}$ y $|\psi|\le 1$ en $\mathbb{D}$ porque, si $|\varphi|\le M$ y $|\psi|\le N$ en $\mathbb{D}$, eligiendo $C=\max\{M,N\}$, vemos que $\left|\frac{\varphi}{C}\right|\le 1$, $\left|\frac{\psi}{C}\right|\le 1$ en $\mathbb{D}$ y $\frac{\varphi}{\psi}=\frac{\varphi/C}{\psi/C}=f$.

Con estas hipótesis adicionales,

$$\left|\frac{\varphi}{\psi}\right|\le\frac{1}{|\psi|}\Rightarrow \log^+\left|\frac{\varphi}{\psi}\right|\le\log^+\frac{1}{|\psi|}=\log\frac{1}{|\psi|}=-\log|\psi|$$

$(\log^+ x\nearrow)$ $\qquad \frac{1}{|\psi|}\ge 1$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{it})|\frac{dt}{2\pi} \leq -\int_0^{2\pi}\log|\psi(re^{it})|\frac{dt}{2\pi}, \quad \forall r\in(0,1).$$

$\psi(0)\neq 0 \Rightarrow$ podemos aplicar la fórmula de Jensen:

$$\int_0^{2\pi}\log|\psi(re^{it})|\frac{dt}{2\pi} = \log|\psi(0)| + \sum_{\substack{|a_n|<r\\ \psi(a_n)=0}} \log\frac{r}{|a_n|}.$$

$r\nearrow \Rightarrow$ lado derecho $\nearrow \Rightarrow$ lado izquierdo $\nearrow$

$$\Rightarrow -\int_0^{2\pi}\log|\psi(re^{it})|\frac{dt}{2\pi} \searrow$$

$$\Rightarrow -\int_0^{2\pi}\log|\psi(re^{it})|\frac{dt}{2\pi} \leq -\int_0^{2\pi}\log|\psi(0)|\frac{dt}{2\pi} = -\log|\psi(0)|<\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{it})|\frac{dt}{2\pi}<\infty \Rightarrow f\in N.$$

($\Rightarrow$): Sea $f\in N$. Si $f\equiv 0$, sirven $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 1$. Por tanto, vamos a suponer de aquí en adelante que $f\not\equiv 0$.

Si $f(0)=0$, sea $m\geq 1$ la multiplicidad del cero de f en $z=0$.

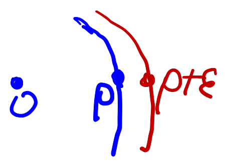
Entonces $\exists \lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^m}=\alpha\neq 0,\infty.$

Sean (a_n) los ceros de f distintos de 0 y repetidos según sus multiplicidades, ordenados (como siempre) de manera que

$$0<|a_1|\leq|a_2|\leq|a_3|\leq\ldots<1.$$

Por el Tma de la unicidad, para casi todo $\rho\in(0,1)$ se tiene que $f(z)\neq 0$ en la circunferencia $\{z:|z|=\rho\}$. Para cualquier ρ así, la función F, dada por

$$F(z)=\log\left[f(z)\left(\frac{\rho}{z}\right)^m\prod_{|a_n|<\rho}\frac{\rho^2-\bar{a}_n z}{\rho(z-a_n)}\right]$$



es analítica en algún disco $D(0;\rho+\varepsilon)\supseteq \bar{D}(0;\rho)=\{z:|z|\leq\rho\}$.

Además, cuando $|z|=\rho$, $\quad \left|\frac{\rho}{z}\right|=1, \quad \left|\frac{\rho^2-\bar{a}_n z}{\rho(z-a_n)}\right|=1,$ (visto antes) luego $\qquad \mathrm{Re}\, F(z) = \log |f(z)|.$ $\qquad$ ($\log u = \log|u| + i \arg u$)

Aplicando la fórmula de Poisson-Jensen con $g = \log|f|$ para $\{z : |z| = \rho\}$, vemos que

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z} \frac{dt}{2\pi} + iC, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$e^{F(z)} = f(z) \frac{\rho^m}{z^m} \prod_{|a_n|<\rho} \frac{\rho^2 - \bar{a}_n z}{\rho(z-a_n)}$$

$$= e^{\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z} \frac{dt}{2\pi} + iC}.$$

Escribiendo, como es habitual,

$$\log x = \log^+ x - \log^- x \quad = -\log^- x - (-\log^+ x)$$

con $\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$, obtenemos $\qquad f(z) = \dfrac{\varphi_\rho(z)}{\psi_\rho(z)},$

donde

$$\varphi_\rho(z) \overset{\text{def'n}}{=} \frac{z^m}{\rho^m} \prod_{|a_n|<\rho} \frac{\rho(z-a_n)}{\rho^2 - \bar{a}_n z} e^{-\int_0^{2\pi} \log^-|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z} \frac{dt}{2\pi} + iC},$$

(*)

$$\psi_\rho(z) \overset{\text{def'n}}{=} e^{-\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z} \frac{dt}{2\pi}}, \qquad |z| \leq \rho.$$

Estas funciones parecen buenas candidatas pero sólo las hemos definido para $|z| \leq \rho < 1$. La existencia de las funciones φ y ψ que buscamos se seguirá de un razonamiento con la compacidad (familias normales).

Sea $0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < 1$, $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 1$ y $f(z) \neq 0$ en cada circunferencia $\{z : |z| = \rho_k\}$. Definamos

$$\Phi_k(z) = \varphi_{\rho_k}(\rho_k z), \quad \Psi_k(z) = \psi_{\rho_k}(\rho_k z).$$

Entonces $\Phi_k, \Psi_k \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (pq. $|z|<1 \Rightarrow |\rho_k z| < \rho_k$) y

$$f(\rho_k z) = \frac{\varphi_{\rho_k}(\rho_k z)}{\psi_{\rho_k}(\rho_k z)} = \frac{\Phi_k(z)}{\Psi_k(z)}, \quad z \in \mathbb{D}$$

y

$$|\Phi_k(z)| = |\varphi_{\rho_k}(\rho_k z)| \le 1, \quad |\Psi_k(z)| \le 1 \text{ en } \mathbb{D}$$

porque, p.ej.,

$$\mathrm{Re}\left\{ \int_0^{2\pi} \log^+|f(\rho e^{it})| \frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z} \frac{dt}{2\pi} \right\} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\log^+|f(\rho e^{it})|}_{\geq 0} \underbrace{P(r,t)}_{\geq 0,\ r \le \rho} \frac{dt}{2\pi} \geq 0$$

$$\left|\left(\frac{z}{\rho}\right)^m\right| \le 1 \text{ si } |z| = r \le \rho \quad \text{y} \quad \left|\frac{\rho(z-a_n)}{\rho^2 - \overline{a_n} z}\right| \le 1 \text{ si } |z| \le \rho$$

y $(*)$ $\Rightarrow$ $|\Phi_k(z)| \le 1$, etc.

Se sigue que $\mathcal{F} = \{\Phi_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{G} = \{\Psi_k : k \in \mathbb{N}\}$ son familias uniformemente acotadas en $\mathbb{D}$ y, por tanto, localmente acotadas. Por el Teorema de Montel, son familias normales. Extraemos primero una subsucesión convergente de $(\Phi_k)_k$ y después otra de la subsucesión de $(\Psi_k)_k$ con los mismos índices, obtenemos una subsucesión $(k_j)_{j=1}^\infty$ de $\mathbb{N}$ t.q.

$$\Phi_{k_j} \underset{K}{\rightrightarrows} \varphi, \quad \Psi_{k_j} \underset{K}{\rightrightarrows} \psi, \quad \forall K \Subset \mathbb{D}, \quad j \to \infty,$$

para ciertas $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (Weierstrass). Tomando límites cuando $j \to \infty$, obtenemos que

$$|\varphi(z)| \le \lim_{j\to\infty} |\Phi_{k_j}(z)| \le 1, \quad |\psi(z)| \le \lim_{j\to\infty} |\Psi_{k_j}(z)| \le 1, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

y $\quad f(z)\psi(z) = \lim_{j\to\infty} f(\rho_{k_j} z)\Psi_{k_j}(z) = \lim_{j\to\infty} \Phi_{k_j}(z) = \varphi(z)$.

¿Hemos terminado? No. Aún no podemos afirmar que $f = \frac{\varphi}{\psi}$ porque no sabemos todavía si $\psi \equiv 0$ o no.

Para ver que $\psi \not\equiv 0$, basta comprobar que $\psi(0) \neq 0$.

Recordemos que $f\in N$, luego

$$|\Psi_{k_j}(0)|=|\psi_{\rho_{k_j}}(0)|=e^{-\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho_{k_j}e^{it})|\frac{dt}{2\pi}}\geq e^{-M}=\delta>0,$$

siendo $\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{it})|\frac{dt}{2\pi}\leq M$, $\forall r\in(0,1)$.

Finalmente,

$$|\psi(0)|=\lim_{j\to\infty}|\Psi_{k_j}(0)|\geq\delta \Rightarrow \psi(0)\neq 0. \quad \boxtimes$$

Corolario. N es un espacio vectorial. (Ejercicio, HOJA 2)

- Recordamos un resultado demostrado antes (clase 13):
  $f\in H^\infty$, $f\not\equiv 0 \Rightarrow \log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$. En particular, $f^*(e^{i\theta})\neq 0$, en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$.

Corolario. $f\in N \Rightarrow \exists\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})=f^*(e^{i\theta})$ en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$.

Dem. $\square$ $f\in N \Rightarrow \exists\varphi,\psi\in H^\infty$ tq. $f=\frac{\varphi}{\psi}$, $\psi\not\equiv 0$. $\exists E,F\subseteq\mathbb{T}$ tq. $m(E)=m(F)=0$, $\exists\varphi^*(e^{i\theta})$, $\forall e^{i\theta}\in\mathbb{T}\setminus E$, $\exists\psi^*(e^{i\theta})$, $\forall e^{i\theta}\in\mathbb{T}\setminus F$. También $\psi^*(e^{i\theta})\neq 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}\Rightarrow\exists G\subseteq\mathbb{T}$, $m(G)=0$ y $\psi^*(e^{i\theta})\neq 0$, $\forall e^{i\theta}\in(\mathbb{T}\setminus F)\setminus G=\mathbb{T}\setminus(F\cup G)$.

Por tanto, $\forall e^{i\theta}\in\mathbb{T}\setminus(E\cup F\cup G)$, existe límite finito

$$f^*(e^{i\theta})=\frac{\varphi^*(e^{i\theta})}{\psi^*(e^{i\theta})}$$

y $m(E\cup F\cup G)=0$. $\boxtimes$

- El Tma. de F. y R. Nevanlinna tiene más corolarios. Los veremos próximamente.
- Referencias útiles: Ahlfors; P. Duren: Univalent Functions (familias normales). Rudin (Cap. 17), P. Duren: Theory of H^p Spaces (Cap. 2) (H^p)