(14) J, 25/3/2021

Recordemos:

Tma. $f\in N$, $f\not\equiv 0$, $a_1,a_2,a_3,\dots$: ceros de f (repetidos según sus multiplicidades) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. (B) ← condición de Blaschke

Corolario. Para $0<p\le\infty$ arbitrario, la misma condición se cumple para toda $f\in H^p$, $f\not\equiv 0$.

Ejemplo. Si $f\in N$ (o a cualquier H^p) y $f(0)=f(\frac{1}{2})=f(\frac{2}{3})=f(\frac{3}{4})=\dots=0$, entonces $f\equiv 0$ (puesto que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$).

• Pregunta. Dada una sucesión (a_n) en el disco que satisface (B), ¿$\exists f\in N$ (H^p, H^∞) t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$ $f(a_n)=0$ y $\forall z\in\mathbb{D}\setminus\{a_1,a_2,\dots\}$, $f(z)\neq 0$? En particular, ¿es eso posible para $a_n=1-\frac{1}{n^2}$?

Respuesta. Sí. Para construir funciones así, conviene establecer algunas propiedades de productos infinitos (funcionales).

REPASO: Productos infinitos (2ª parte: productos funcionales)

Def'n. Sea $S\subseteq\mathbb{C}$ y $f_n: S\to\mathbb{C}$. Diremos que el producto infinito (funcional) $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge en S si $\forall z_0\in S$, el producto numérico $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ converge (en el sentido de la definición ya vista).

Si esto ocurre, diremos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en S si la sucesión de productos parciales, $\prod_{n=1}^{N} f_n(z)$, converge uniformemente a cierta función $f: S\to\mathbb{C}$ cuando $N\to\infty$.

• Según el Tma. de Weierstrass, si Ω es un dominio, $f_n\in H(\Omega)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ en todo $K\Subset\Omega$, entonces $f\in H(\Omega)$. Lo que nos interesa es precisamente tener una situación así para construir nuevas funciones holomorfas como productos de otras holomorfas.

<u>Tma.</u> Supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n : S \to \mathbb{C}$ es una función acotada y que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformemente en S. Entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$$

converge uniformemente en S. Además, dado $z_0 \in S$, $f(z_0) = 0$ $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $u_n(z_0) = -1$.

Si $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ es cualquier permutación de $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, entonces se cumple

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_{n_k}(z)), \quad \forall z \in S.$$

(En otras palabras: 1) los ceros de f son precisamente los ceros de sus factores; 2) el cambio de orden de los factores no altera el valor del producto.)

- Antes de demostrar este resultado, probaremos un lema técnico.

<u>Lema.</u> Si $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{C}$ y $p_N = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n)$, $p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1 + |u_n|)$, entonces

$$\underline{p_N^* \le e^{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N|}} \quad \text{y} \quad \underline{|p_N - 1| \le p_N^* - 1.}$$

<u>Dem.</u> $\square$ • Usamos la desigualdad elemental: $1 + x \le e^x$, $x \ge 0$, sustituyendo x por $|u_1|, \dots, |u_N|$, respectivamente y multiplicando las desigualdades resultantes para obtener la primera.

- La segunda se puede demostrar por inducción.

Caso $N = 1$: $|p_1 - 1| = |u_1| = p_1^* - 1$, trivialmente.

Supongamos que $|p_N - 1| \le p_N^* - 1$ para un cierto $N \in \mathbb{N}$.

Entonces $p_{N+1} - 1 = p_N(1 + u_{N+1}) - 1 = \underline{p_N - 1} + \underline{p_N u_{N+1} - u_{N+1}} + u_{N+1}$

$= (p_N - 1)(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}$

$$\Rightarrow \quad |p_{N+1}-1| \leq |p_N-1|\,(1+|u_{N+1}|)+|u_{N+1}|$$
$$\leq (p_N^*-1)\,(1+|u_{N+1}|)+|u_{N+1}| \quad \text{(Hip. ind.)}$$
$$= p_N^*\,(1+|u_{N+1}|)-1$$
$$= p_{N+1}^*-1\,, \quad \text{QED.} \qquad \boxtimes$$

Dem. del Tma. $\square$ • Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|$ converge uniformemente en S, digamos a la suma $\sigma(z)$, $\sigma: S\to[0,+\infty)$. Entonces, tomando $\varepsilon=1$, $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\left|\sum_{n=1}^{N}|u_n(z)|-\sigma(z)\right|<1$, $\forall z\in S$

$$\Rightarrow \forall z\in S,\ |\sigma(z)|<1+\sum_{n=1}^{N}|u_n(z)|\leq K \quad \text{(A)}$$

(por hipótesis, las u_n son funciones acotadas en S y N es fijo). Así pues, $\forall z\in S$, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|\leq K$.

• Sean $p_N(z)=\prod_{n=1}^{N}(1+u_n(z))$, $p_N^*(z)=\prod_{n=1}^{N}(1+|u_n(z)|)$. Entonces

$$\odot \quad |p_N(z)|\leq p_N^*(z) \overset{\text{(Lema)}}{\leq} e^{\sum_{n=1}^{N}|u_n(z)|} \leq e^{\sigma(z)} \overset{\text{(A)}}{\leq} e^{K}, \quad \forall N\in\mathbb{N},\ \forall z\in S.$$

• Sea $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$. Entonces $\exists N_0\in\mathbb{N}$ t.q.

$$\forall z\in S,\ \sum_{n=N_0}^{\infty}|u_n(z)|<\varepsilon. \quad (*)$$

Sea $\{n_1,n_2,\dots\}$ una permutación arbitraria de $\mathbb{N}$. Si $N\geq N_0$ y elegimos M suficientemente grande, tendremos

$$\{1,2,\dots,N\}\subseteq\{n_1,n_2,\dots,n_M\}.$$

Escribiendo
$$q_M(z)=\prod_{k=1}^{M}(1+u_{n_k}(z)),$$
vemos que $p_N(z)$ es un factor parcial del producto $q_M(z)$ y

$$q_M(z)-p_N(z)=p_N(z)\Big[\prod_{n_k>N,\,k\le M}(1+u_{n_k}(z))-1\Big] \qquad (\Rightarrow n_k>N\geq N_0)$$

$\circledast$ y el Lema probado antes $\Rightarrow$

$$|q_M(z)-p_N(z)|\le|p_N(z)|\,(e^{\varepsilon}-1)\le 2\varepsilon|p_N(z)|\le 2e^K\varepsilon. \quad (E)$$

$e^{\varepsilon}-1\le 2\varepsilon,\ \forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$

- Si $n_k=k$, $\forall k\in\mathbb{N}$ (y, por tanto, tenemos el producto inicial, sin permutar los factores), entonces $q_M(z)=p_M(z)$ y $(E)\Rightarrow$

$$|p_M(z)-p_N(z)|\le 2e^K\varepsilon, \quad \forall M \text{ suficientemente grande}$$

$\Rightarrow (p_N(z))_N$ es una sucesión uniforme de Cauchy (en S)

$\Rightarrow p_N(z)\underset{S}{\rightrightarrows} f$, para cierta función $f:S\to\mathbb{C}$.

- De (E) también se sigue que

$$|p_M(z)-p_{N_0}(z)|\le 2|p_{N_0}(z)|\varepsilon, \quad \forall M>N_0,\ \forall z\in S$$

$$\Rightarrow \quad |p_{N_0}(z)|-|p_M(z)|\le 2|p_{N_0}(z)|\varepsilon, \quad \forall M>N_0,\ \forall z\in S$$

$$\Rightarrow \quad |p_M(z)|\geq(1-2\varepsilon)|p_{N_0}(z)|, \quad \forall M>N_0,\ \forall z\in S\ (\varepsilon<\tfrac{1}{2}).$$

- Tomando $\lim_{M\to\infty}$, obtenemos:

$$|f(z)|\geq\overbrace{(1-2\varepsilon)}^{>0}|p_{N_0}(z)|, \quad \forall z\in S,$$

así que $f(z)=0\Leftrightarrow p_{N_0}(z)=0\Leftrightarrow\exists n\in\{1,\dots,N_0\}$ t.q. $1+u_n(z)=0$.

- Finalmente, $(E)\Rightarrow \lim_{M\to\infty}q_M(z)=\lim_{N\to\infty}p_N(z)=f(z)$, tomando el $\lim_{N\to\infty}$ (siendo $n_M>N$). $\boxtimes$

Corolario. Supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in H(\Omega)$, $f_n \not\equiv 0$ en Ω (Ω dominio en $\mathbb{C}$) y que $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ converge uniformemente en cada $K \in \Omega$. Entonces el producto $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en cada $K \in \Omega$ y, por tanto, $f \in H(\Omega)$.

Además, denotando por $m(f, z)$ a la multiplicidad del cero de f en $z \in \Omega$ (posiblemente $= 0$), tenemos que

$$(M) \qquad m(f; z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n; z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Dem. $\square$ • Basta elegir $u_n(z) = 1 - f_n(z)$ para concluir la primera parte del resultado, con $S = K \in \Omega$ arbitrario.

• Veamos la segunda parte. Sea $z_0 \in \Omega$ arbitrario. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ converge uniformemente en cada disco fijo y cerrado $\overline{D}(z_0; \delta) \subseteq \Omega$, $\exists$ un entorno V de z_0 en el que sólo un número finito de funciones f_n puede tener ceros (pues $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_0$ $\forall z \in \overline{V}$ $|1 - f_n(z)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f_n(z) \neq 0$. El producto de los factores restantes es $\neq 0$, con lo cual $m(f_n; z) = 0$, $\forall n \geq N_0$ $\forall z \in V$, lo cual nos da (M). (Esto también muestra que, como mucho, un número finito de términos en (M) puede ser > 0.) $\boxtimes$

PRODUCTOS INFINITOS DE BLASCHKE

Teorema. Sean $a_n \in \mathbb{D}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Sea $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \varphi_{a_n}(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces:

a) El producto $B(z)$ converge uniformemente en cada $K \in \mathbb{D}$;

b) $B \in H^\infty$, con $|B(z)| < 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$;

c) los únicos ceros de B son los puntos a_n (cada uno con la multiplicidad igual al número de sus repeticiones en la sucesión).

y, posiblemente, el origen (multiplicidad: $k \geq 0$).

Definición. B = producto infinito de Blaschke con los ceros $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (y acaso $z=0$). Lo mismo para λB, $|\lambda|=1$. **Obs'n.** $B(0)=\prod_{n=1}^{\infty}|a_n|>0$.

(a_n): sucesión de Blaschke.

Dem. □ según el último Tma. probado, es suficiente ver que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\right|$$ converge uniformemente en cada $K \Subset \mathbb{D}$.

Obviamente, basta comprobarlo en cada $K=\overline{D}(0;r)$, $0<r<1$.

Si $|z|\le r$, vemos que

$$\left|1-\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\right| = \left|\frac{a_n-|a_n|^2 z-|a_n|a_n+|a_n|z}{a_n(1-\bar{a}_n z)}\right|$$

$$=\left|\frac{(a_n+|a_n|z)(1-|a_n|)}{a_n(1-\bar{a}_n z)}\right|$$

$$\le \frac{|a_n|+|a_n|r}{|a_n|(1-|a_n|r)}(1-|a_n|)$$

$$\le \frac{1+r}{1-r}(1-|a_n|).$$

Por el criterio de comparación de Weierstrass (M-test), de la convergencia de $\sum_n (1-|a_n|)$ se sigue la convergencia uniforme de la serie considerada en $\overline{D}(0;r)=\{z: |z|\le r\}$.

El Tma. probado anteriormente nos dice que $B\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y sólo tiene los ceros prescritos, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. (El factor z^k sólo puede añadir un cero de orden $k\geq 0$ en el origen y no cambia nada más.)

Puesto que para cada factor tenemos

$$\left|\frac{|a_n|}{a_n}\varphi_{a_n}(z)\right|<1 \text{ en } \mathbb{D},$$

todos los productos parciales tienen módulo <1 y se sigue que $|B(z)|\le 1$, $\forall z\in\mathbb{D}$ (o sea, $\|B\|_{H^\infty}\le 1$). Puesto que $B\not\equiv$ cte, se sigue que, de hecho, $|B(z)|<1$, $\forall z\in\mathbb{D}$ (Principio del módulo máximo).

Corolario. Para cualquier $p\in[0,\infty]$ (entendiendo que $H^0=N$), los únicos posibles conjuntos de ceros de las funciones en H^p son las sucesiones de Blaschke y, recíprocamente, para toda sucesión de Blaschke $\exists B\in H^\infty$ (y, por tanto, $B\in H^p$) con precisamente esos ceros.

• Esto resuelve uno de los problemas principales planteados al comienzo del curso.

• Puesto que cada $B\in H^\infty$, sabemos que en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$ existe límite radial finito $B^*(e^{i\theta})=\lim\limits_{r\to1^-} B(re^{i\theta})$; además, $|B^*(e^{i\theta})|\le 1$ en c.t.p. $e^{i\theta}$.

Ahora veremos que es posible determinar $|B^*(e^{i\theta})|$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

Teorema. Si B es un producto de Blaschke infinito, entonces $|B^*(e^{i\theta})|=1$ en c.t.p. $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$ y $\lim\limits_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}=0$.

Dem. □ Por un resultado probado antes (Clase 13), las medias integrales
$$M_r(B)=\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$$
son funciones crecientes de r en el intervalo $(0,1)$. Puesto que $|B(re^{i\theta})|<1$, $\forall r,\forall\theta \Rightarrow M_r(B)\le 0$, $\forall r\in(0,1)$, así que existe el límite que nos interesa, es finito y ≤ 0.

Consideramos $B_N(z)=\prod\limits_{n=N}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$, $N\ge 1$, $z\in\mathbb{D}$.

Entonces $\frac{B(z)}{B_N(z)}=\prod\limits_{n=1}^{N-1}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$, un producto de Blaschke finito y, por tanto, una función analítica en un disco más grande que $\mathbb{D}$ (de radio $\frac{1}{|a_{N-1}|}$, si ordenamos los ceros de menor a mayor módulo). Además, no tiene ceros en la corona $\{z:|a_{N-1}|<|z|<\frac{1}{|a_{N-1}|}\}$.

Por tanto, la función $\log\left|\frac{B}{B_N}\right|$ (con valores reales) es continua en dicha corona y $\log\left|\frac{B(z)}{B_N(z)}\right| = 0$, $\forall z\in\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$ (propiedad básica de los productos finitos de Blaschke: módulo 1 en $\mathbb{T}$). Se sigue que

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}\left[\log|B_N(re^{i\theta})| + \log\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})}\right|\right]\frac{d\theta}{2\pi}$$

(paso al límite: convergencia uniforme en $r\in[R,1]$)

$$= \lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}\log|B_N(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Por el Tma. ya mencionado del otro día, $M_r(B)$ crece cuando r crece, $\lim_{r\to 0^+} M_r(B) = \log|B(0)|$ y $M_r(B)\le M^*(B)$, $\forall r\in(0,1)$, luego

$$\log|B_N(0)| \le \lim_{r\to 1^-}\underbrace{\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}}_{=M_r(B)} \le \underbrace{\int_0^{2\pi}\log|B^*(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}}_{=M^*(B)} \le 0.$$

$|B^*|\le 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$

Pero $\lim_{N\to\infty}\log|B_N(0)| = \lim_{N\to\infty}\log\underbrace{\prod_{n=N}^{\infty}|a_n|}_{\to 1,\, N\to\infty} = 0 \Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi}\log|B^*(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Puesto que $\log|B^*|\le 0$ en c.t.p., se sigue que $\log|B^*| = 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ $\Rightarrow$ $|B^*|=1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. $\boxtimes$

- La siguiente propiedad de los productos de Blaschke nos dice que actúan como <u>divisores isométricos</u> de los ceros de una función en H^p (ó N): si B es el producto de Blaschke correspondiente a los ceros de una $f\in H^p$ (ó N), entonces $\frac{f}{B}\in H^p$ (ó N) y tiene la misma norma (o "norma") que f.

($z-a_n$ y $a_n - z$ se cancelan)

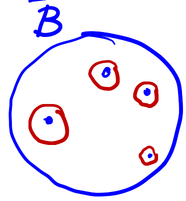
Recordemos que

$$\|f\|_p = \|f\|_{H^p} = \lim_{r\to 1^-}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<\infty$$

$$\|f\|_0 = \|f\|_N = \lim_{r\to 1^-} e^{\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}}.$$

(Clase 11)

<u>Teorema</u>. Sea $f\in N$, $f\not\equiv 0$ y B el producto de Blaschke formado con los ceros de f (finito o infinito, según corresponda). Sea $g=\frac{f}{B}$ (obviamente, $g\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, debido a sus singularidades evitables).



Entonces $g \in N$ y $\|g\|_0 = \|f\|_0$.

Si, además, $f \in H^p$ $(0<p\leq\infty)$, entonces $g \in H^p$ y $\|g\|_p = \|f\|_p$.

Dem. □ • Obviamente, $f = Bg \Rightarrow |g(z)| \geq |B(z)g(z)| = |f(z)|$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Lema (fácil): $s,t \geq 0 \Rightarrow \log^+(st) \leq \log^+ s + \log^+ t$.

$\left(st<1 \Rightarrow \log^+(st) = 0 \leq \log^+ s + \log^+ t; \right.$

$\left. st \geq 1 \Rightarrow \log^+(st) = \log(st) = \log s + \log t \leq \log^+ s + \log^+ t. \right)$

Por tanto: $\log^+|g(re^{it})| \leq \log^+|f(re^{it})| + \log \dfrac{1}{|B(re^{it})|}$.

Integrando y tomando $\lim\limits_{r\to 1^-}$, obtenemos (por el Tma. anterior)

$$\log \|g\|_0 = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{it})| \frac{dt}{2\pi} \leq \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{it})| \frac{dt}{2\pi} + 0 = \log \|f\|_0$$

$$|g| \geq |f| \Rightarrow \log^+|g| \geq \log^+|f| \Rightarrow \|g\|_0 \geq \|f\|_0.$$

Conclusión: $\|g\|_0 = \|f\|_0$.

• Supongamos ahora que (en lugar de $f \in N$) $f \in H^p$ para algún $p>0$. Ordenemos los ceros de f, p.ej., de manera que $0 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$

Sea B_n el producto de Blaschke finito formado usando los n primeros ceros de la lista, teniendo en cuenta las multiplicidades. Para cada n fijo, $|B_n(re^{i\theta})| \rightrightarrows 1$ cuando $r \to 1^-$.

Sea $g_n = \dfrac{f}{B_n}$.

Basta comprobar esto para un factor, $\dfrac{|a_n|}{a_n} \dfrac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}$ y éste lo cumple porque

$$1 - \left| \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z} \right|^2 = 1 - |\varphi_{a_n}(z)|^2 = \frac{(1-|a_n|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}_n z|^2} \rightrightarrows 0, \ |z| = r \to 1^-$$

p.q. $\dfrac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n z|^2} \leq \dfrac{1-|a_n|^2}{(1-|a_n|)^2} = \dfrac{1+|a_n|}{1-|a_n|}$, que no depende de z.

$|B_n(re^{i\theta})| \rightrightarrows 1$, $r\to 1^- \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists R\in(0,1)$ t.q. si $R<r<1$, entonces

$$\left| 1 - \frac{1}{|B_n(re^{i\theta})|^p} \right| < \varepsilon .$$

Luego

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_n(re^{i\theta})|^p} dm(\theta) - \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p dm(\theta) \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \left| 1 - \frac{1}{|B_n(re^{i\theta})|^p} \right| dm(\theta)$$

$$\leq \varepsilon \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p dm(\theta) \leq \varepsilon \|f\|_{H^p}^p .$$

$(= M_p^p(r,f)\ \nearrow$ cuando $r\nearrow)$

Esto nos dice que

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_n(re^{i\theta})|^p} dm(\theta) = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p dm(\theta) = \|f\|_p^p$$

$\Rightarrow \|g_n\|_p = \|f\|_p$. (**)

Pero $|B_{n+1}| \leq |B_n|$ (por la definición de los B_n) $\Rightarrow$

$$|g_{n+1}| = \left| \frac{f}{B_{n+1}} \right| \geq \left| \frac{f}{B_n} \right| = |g_n| .$$

Por el Tma. de la convergencia monótona,

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p dm(\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p dm(\theta) \leq \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p^p \overset{(**)}{=} \|f\|_p^p$$

$(M_p(r,g_n)\ \nearrow$ cuando $r\nearrow)$

Tomando $\lim_{r\to 1^-}$, obtenemos

$$\|g\|_p^p \leq \|f\|_p^p \Rightarrow \|g\|_p \leq \|f\|_p .$$

Por otra parte, $|g|\geq|f|$ en $\mathbb{D} \Rightarrow \|g\|_p \geq \|f\|_p$, así que $\|g\|_p = \|f\|_p$. $\boxtimes$

- Este resultado dará lugar a lo que se conoce como técnica de factorización de Riesz, que es una herramienta muy útil en la teoría de los espacios de Hardy. (La veremos en la próxima clase.)