(11) M, 16/3/2021

- Nuestro próximo objetivo es demostrar que la media integral $M_p(r,f)$ de una $f \in H(\mathbb{D})$ (con p fijo) es una función creciente de $r \in [0,1)$. Para probar este hecho, necesitaremos repasar algunos detalles relacionados con la convexidad y adquirir ciertos conocimientos de la subarmonicidad.

Desigualdad de Jensen

- Supongamos que $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$. Como ya sabemos, se dice que φ es convexa en (a,b) si para todo $\lambda \in [0,1]$ y $\forall x, y \in (a,b)$ satisface

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda \varphi(y). \qquad (C)$$

La definición es similar para $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$.

- La condición (C) es equivalente a

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u-t}, \quad a < s < t < u < b. \quad (E)$$

En efecto,

$$(E) \Leftrightarrow (u-t)[\varphi(t) - \varphi(s)] \leq (t-s)[\varphi(u) - \varphi(t)], \quad a < s < t < u < b$$

$$\Leftrightarrow (u-s)\varphi(t) \leq (u-t)\varphi(s) + (t-s)\varphi(u), \quad a < s < t < u < b$$

$$\Leftrightarrow (C), \text{ con } \lambda = \frac{t-s}{u-s}, \quad 1-\lambda = \frac{u-t}{u-s}, \quad x = s, \ y = u.$$

- No es difícil ver que:

$$\varphi \text{ convexa en } (a,b) \Rightarrow \varphi \in C(a,b).$$

(Rudin, Real and Complex Analysis, Cap. 3)

Esta propiedad no se tiene en $[a,b]$; p.ej., $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x < b \\ 1, & x = b \end{cases}$ es convexa pero no continua en $[a,b]$.

- Es bien conocido de los cursos básicos que:

φ diferenciable y convexa en $(a,b) \Leftrightarrow (a < x < y < b \Rightarrow \varphi'(x) \leq \varphi'(y))$

$\Leftrightarrow \varphi'$ es creciente en (a,b).

(usando (E) y el TVM)

• Lo que nos interesa aquí es probar la siguiente desigualdad, que es una herramienta muy útil en Análisis.

Teorema (Desigualdad de Jensen). Sea μ una medida positiva en (una σ-álgebra de un) espacio Ω t.q. $\mu(\Omega)=1$. Si $f:\Omega\to\mathbb{R}$ es una función t.q. $\forall x\in\Omega,\ a<f(x)<b$ (siendo posibles los casos $a=-\infty$ y/o $b=\infty$), $f\in L^1(\Omega,\mu)$ y $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ es una función convexa, entonces

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)\le\int_\Omega(\varphi\circ f)\,d\mu.$$

• El enunciado incluye el caso cuando $\varphi\circ f\notin L^1(\Omega,\mu)$, es decir, $\int_\Omega(\varphi\circ f)\,d\mu=+\infty$.

• Cuando X es una variable aleatoria con función de densidad g y $\Omega=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, $d\mu(x)=g(x)dx$ (así que $\mu(\mathbb{R})=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=1$), la desigualdad de Jensen con $f(x)=x$ se convierte en

$$\varphi\left(\int_{\mathbb{R}}x\,g(x)dx\right)\le\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,g(x)dx,$$

es decir:

$$\varphi(E[X])\le E(\varphi(X)).$$

Dem. $\square$ Sea $t=\int_\Omega f\,d\mu$.

$a<f(x)<b,\ \forall x\in\Omega,\ \mu(\Omega)=1\Rightarrow a<t<b.$

Volviendo a la desigualdad (E) de la página anterior, sea

$$m=\sup\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}:\ a<s<t<b\right\}.$$

Debido a (E), $\quad m\le\dfrac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t},\quad\forall u\in(t,b)$

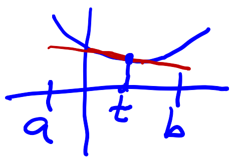
$$\Rightarrow\varphi(u)\ge\varphi(t)+m(u-t),\qquad t<u<b.$$

Sustituyendo u por $s\in(t,b)$, obtenemos

$$\varphi(s)\ge\varphi(t)+m(s-t),\qquad t<s<b.$$

Por la definición de m, lo mismo se cumple cuando $a<s<t$, luego

"recta de soporte"



$\varphi(s) \geq \varphi(t) + m(s-t)$, $\forall s \in (a,b)$.

$f:\Omega \to (a,b) \Rightarrow \forall x \in \Omega$, $\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + m(f(x)-t)$. $(*)$

$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ convexa} \Rightarrow \varphi \in C(a,b) \\ f:\Omega \to (a,b) \text{ medible}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \circ f$ es medible. Integrando $(*)$ respecto a μ, obtenemos $\int_\Omega (\varphi \circ f)\,d\mu \geq \varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) + m\Big(\underbrace{\int_\Omega f\,d\mu - t}_{=0}\Big)$

$\int_\Omega 1\,d\mu = 1$

y la desigualdad se sigue. $\boxtimes$

Corolarios/aplicaciones.

1. Si μ es una medida unitaria en Ω, $p > q$ y $f \in L^p(\Omega,\mu)$, aplicando Jensen a $|f|^q$ en lugar de f y con $\varphi(x) = x^{\frac{p}{q}}$ (convexa en $(0,+\infty)$, por ser $\frac{p}{q} > 1$), obtenemos

$$\left(\int_\Omega |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} = \varphi\left(\int_\Omega |f|^q d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi(|f|^q)\,d\mu$$

$$= \int_\Omega |f|^p d\mu \quad \Rightarrow \|f\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)},$$

una desigualdad conocida.

(Obsérvese que, si $E = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, $\int_{\Omega\setminus E} = \int_\Omega$ y así basta con usar $(0,+\infty)$ en lugar de $[0,+\infty)$.)

2. $\varphi(x) = e^x$, convexa en $\Omega = (-\infty,\infty)$. Jensen $\Rightarrow$

$$e^{\int_\Omega f\,d\mu} \leq \int_\Omega e^f d\mu.$$

Escribiendo $g = e^f > 0$:

$$e^{\int_\Omega \log g\,d\mu} \leq \int_\Omega g\,d\mu \qquad \text{(A-G)}$$

media geométrica de g — media aritmética de g

- Los nombres están justificados por la siguiente situación particular: $\Omega=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $\mu(\{x_k\})=\frac{1}{n}$, $\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$, $g(x_k)=a_k>0$, $\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$.

$$\int_\Omega g\,d\mu=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\ ;\ \int_\Omega \log g\,d\mu=\frac{\log a_1+\log a_2+\dots+\log a_n}{n}$$

$=\log(a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}}$. La desigualdad (A-G) se convierte en

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}.$$

(media geométrica de $a_1,\dots,a_n$) (media aritmética de $a_1,\dots,a_n$)

- Cambiando la medida μ por otra discreta con $\mu(\{x_k\})=t_k$, $\sum_{k=1}^n t_k=1$, obtenemos $a_1^{t_1}a_2^{t_2}\dots a_n^{t_n}\le t_1a_1+t_2a_2+\dots+t_na_n$.

FUNCIONES SUBARMÓNICAS

Pueden tratarse en un contexto más especial, suponiendo continuidad (P.L. Duren: *Theory of H^p Spaces*, 2ª ed., Dover 2000) o en uno más general, pidiendo menos (Rudin: *Real and Complex Analysis*).

Veremos la definición más general, con semicontinuidad, admitiendo el valor $-\infty$, para cubrir más casos.

Def'n. Sea X un espacio topológico y $f: X\to\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ una función (obviamente, esto incluye el caso $f: X\to\mathbb{R}$). Se dice que f es semicontinua superiormente si $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, el conjunto $\{x\in X: f(x)<\alpha\}=f^{-1}((\alpha,\infty])$ es abierto.

- Evidentemente, f continua $\Rightarrow f$ semicontinua superiormente.

Prop. Sea Ω un abierto en el plano y $u:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ una función semicontinua superiormente y t.q. $\forall z\in\Omega$, $-\infty\le u(z)<\infty$.
Entonces $\forall K\Subset\Omega$ $\exists M>0$ t.q. $\forall z\in K$ $u(z)\le M$.

Dem. $\square$ Para $n\in\mathbb{N}$, sea $K_n=\{z\in K : u(z)\geq n\}$. Entonces K_n es cerrado: $K_n = K\cap(\Omega\setminus\{z: u(z)<n\})$ y acotado (p.q. K lo es) $\Rightarrow K_n$ es compacto. Obviamente, $K\supseteq K_1\supseteq K_2\supseteq K_3\supseteq\cdots$

Por un teorema visto en Topología o en otro curso (Propiedad de intersección finita), si fuese $K_n\neq\emptyset$ $\forall n\in\mathbb{N}$, tendríamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\neq\emptyset$. En este caso, $\exists z\in\Omega$ tq. $\forall n\in\mathbb{N}$ $u(z)\geq n \Rightarrow u(z)=+\infty$, ※.

Por tanto, $\exists N\in\mathbb{N}$ con $K_N=\emptyset \Rightarrow \forall z\in K$, $u(z)<N$. $\boxtimes$

- Si f es semicontinua superiormente en Ω, entonces f es medible (considerando la σ-álgebra de conjuntos de Borel en Ω). Entonces tiene sentido considerar las integrales $\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$, cuando $\overline{D}(a;r)\subseteq\Omega$. Si u es como las funciones consideradas en la Prop. de arriba, dichas integrales serán $<\infty$. Para que sean finitas, debemos pedir que sean $\neq-\infty$.

Def'n. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $u:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$. Se dice que u es <u>subarmónica</u> en Ω si cumple las siguientes condiciones:

a) $\forall z\in\Omega$, $-\infty\leq u(z)<\infty$;

b) u es semicontinua superiormente en Ω;

c) si $\overline{D}(a;r)\subseteq\Omega$, entonces $u(a)\leq\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$;

d) ninguna de las integrales en c) es $=-\infty$.

- $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $u\in h(\Omega)\Rightarrow u$ es subarmónica en Ω.

Tma. Sea u subarmónica en Ω y $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ creciente y convexa. Entonces $\varphi\circ u$ es subarmónica.

(Puesto que admitimos la posibilidad de que $u(z)=-\infty$ para algunos z, definiremos $\varphi(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$.)

Dem. □ • Observemos primero que φ es creciente y continua. Por tanto, $\varphi\circ u$ es semicontinua superiormente: $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\{x\in\Omega : \varphi(u(x))<\alpha\} = \{x\in\Omega : u(x)<\varphi^{-1}(\alpha)\} \text{ es abierto.}$$

• Si $-\infty<u(z)<\infty$, obtenemos $-\infty<\varphi(u(z))<\infty$ por hipótesis. Si $u(z)=-\infty$, la monotonía de φ implica $-\infty\leq\varphi(u(z))$. Por tanto, $-\infty\leq\varphi(u(z))<\infty$.

• Si $\overline{D}(a;r)\subseteq\Omega$, entonces u cumple (c). φ creciente $\Rightarrow$

$$\varphi(u(a))\leq\varphi\left(\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right) \leq \int_0^{2\pi}\varphi(u(a+re^{i\theta}))\frac{d\theta}{2\pi} \quad \odot$$

por la desigualdad de Jensen, puesto que la medida $dm(\theta)=\frac{d\theta}{2\pi}$ es positiva y unitaria en $[0,2\pi]$, u es integrable debido a las condiciones a)–d) y φ es convexa.

• Por hipótesis, $\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}>-\infty$, luego el término intermedio en $\odot$ es $>-\infty$, así que $\int_0^{2\pi}\varphi(u(a+re^{i\theta}))\frac{d\theta}{2\pi}>-\infty$. ⊠

Corolario. Sea Ω un dominio, $f\in H(\Omega)$ y $f\not\equiv 0$. Entonces la función $\log^+|f|$ y todas las funciones $|f|^p$, $0<p<\infty$, son subarmónicas en Ω.

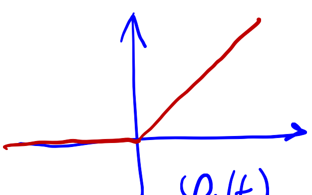
• Como es habitual, $\log^+x=\begin{cases}\log x, & x\geq 1\\ 0, & 0<x<1.\end{cases}$

Dem. □ Puede verse que $\log|f|$ es subarmónica (lo haremos más adelante), interpretando $\log|f(z)|=-\infty$ cuando $|f(z)|=0$.

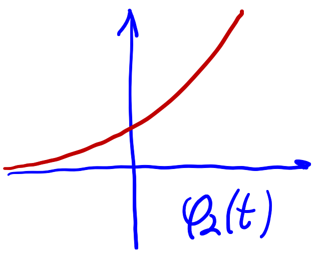
Aplicando el Tma. anterior a $u=\log|f|$, con

$$\varphi_1(t)=\max\{0,t\} \quad \text{y} \quad \varphi_2(t)=e^{pt}, \text{ resp.},$$

siendo ambos crecientes y convexas en $\mathbb{R}$, el resultado se sigue. ⊠



$\varphi_1(t)$

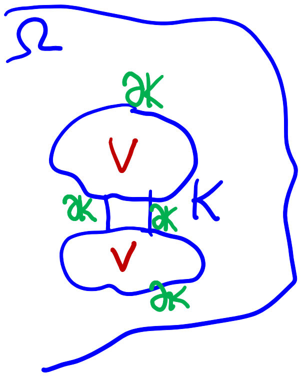


$\varphi_2(t)$

Para ver la subarmonicidad de $\log|f|$, tendremos que comprobar (c) directamente.

• El siguiente resultado justifica el término "subarmónica".

Tma. Sea $u \in C(\Omega)$ y subarmónica, $K \Subset \Omega$, $V = \operatorname{Int} K = \overset{\circ}{K}$, $h : K \to \mathbb{R}$, $h \in C(K) \cap \mathcal{h}(V)$ y supongamos que $\forall z \in \partial K$, $u(z) \leq h(z)$. Entonces $\forall z \in K, u(z) \leq h(z)$.



Dem. □ Sea $v = u - h$. Supongamos lo contrario:
$\exists z \in V = K \setminus \partial K$ t.q. $v(z) > 0$.
$v \in C(K) \Rightarrow v$ alcanza el valor $m = \max\limits_K v$.

Por hipótesis, $v \leq 0$ en ∂K, así que
$\emptyset \neq E = \{z \in K : v(z) = m\} \subseteq V$.

Sea $a \in \partial E$. $\exists r > 0$ t.q. $\overline{D}(a;r) \subseteq V$ pero un arco I de la circunferencia $\{z : |z-a| = r\}$ $= \partial \overline{D}(a;r)$ está contenido en E^c, por la definición de ∂E y porque $v \in C(K) \Rightarrow E$ cerrado en V.

Entonces
$$v(a) = m > \int_0^{2\pi} v(a + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$
ya que $v \leq m$ y $v < m$ en el arco I. Por tanto, v no posee la propiedad c) (desigualdad del valor medio).

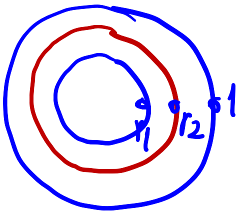
Pero $v = u - h$, u cumple c) y h tiene la propiedad del valor medio $\Rightarrow$
$$v(a) = u(a) - h(a) \leq \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} - \int_0^{2\pi} h(a + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} v(a + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

#. Conclusión: $\forall z \in V$, $v(z) \leq 0$. ☒

Tma. Sea $u \in C(\mathbb{D})$ y subarmónica en $\mathbb{D}$. Consideremos
$$m(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Entonces $r_1 < r_2 \Rightarrow m(r_1) \leq m(r_2)$.

Dem. $\square$ Por el Teorema de Schwarz visto el otro día (convoluciones con el núcleo de Poisson resuelven el problema de Dirichlet con datos continuos en la circunferencia),



$$\exists h \in h(D(0;r_2)) \cap C(\overline{D}(0;r_2)) \text{ t.q. } h = u$$

en la circunferencia $\{z : |z| = r_2\}$ (pintada en rojo).

Tma. anterior $\Rightarrow$ $u(z) \leq h(z)$, $\forall z \in D(0;r_2) \Rightarrow$

$$m(r_1) = \int_0^{2\pi} u(r_1 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} h(r_1 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = h(0) \quad \text{(Prop. del valor medio)}$$

$$= \int_0^{2\pi} h(r_2 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} u(r_2 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = m(r_2). \quad \boxtimes$$

Corolario (Tma. de Hardy). Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $0 < p < \infty$. Entonces

$$0 \leq r_1 < r_2 < 1 \Rightarrow M_p(r_1, f) \leq M_p(r_2, f),$$

siendo, como antes, $M_p(r,f) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Si definimos

$$M_0(r,f) = e^{\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}},$$

también se tiene

$$0 \leq r_1 < r_2 < 1 \Rightarrow M_0(r_1, f) \leq M_0(r_2, f).$$

Dem. $\square$ Se sigue del Tma. anterior y de la subarmonicidad y continuidad de $|f|^p$ y de $\log^+|f|$ en $\mathbb{D}$. $\boxtimes$

- Con esto, finalmente hemos justificado que

$$\sup_{0 \leq r < 1} M_p(r,f) = \lim_{r \to 1^-} M_p(r,f).$$

Por tanto, en la definición de los espacios de Hardy y de su norma es legítimo tomar tanto $\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r,f)$ como

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(r,f).$$

¿Cuál es el papel de las "medias integrales" M_0?

<u>Definición.</u> La <u>clase de Nevanlinna</u> es el conjunto

$$N = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0\le r<1} M_0(r,f) = \lim_{r\to 1^-} M_0(r,f) < \infty\}$$

$$= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\}.$$

- Puesto que $x^p > \log^+ x$, para todo x suficientemente grande, es obvio que, para $p>0$ arbitrario,

$$f \in H^p \Rightarrow \exists M>0 \text{ t.q. } \forall r\in[0,1) \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \le M$$

$$\Rightarrow \exists M'>0 \text{ t.q. } \forall r\in[0,1) \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \le M'$$

$$\Rightarrow f \in N. \qquad \left(\bigcup_{0<p\le\infty} H^p \subseteq N\right)$$

- En cierto modo, "$N = \lim_{p\to 0^+} H^p$". Podemos llevar a cabo el siguiente razonamiento (no muy riguroso):

$$\log \lim_{p\to 0^+} \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to 0^+} \frac{\log \int |f|^p dm}{p}$$

$$\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{L'Hopital}}{=}} \lim_{p\to 0^+} \frac{\frac{d}{dp} \log \int |f|^p dm}{1} = \lim_{p\to 0^+} \frac{\int |f|^p \log|f| dm}{\int |f|^p dm}$$

$$= \int \log|f| dm$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to 0^+} \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = e^{\int \log|f| dm}.$$

Suponiendo que esto se puede interpretar correctamente (incorporando, de alguna manera, $\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p dm(\theta)$, etc.), parecería razonable definir el "límite" de los espacios H^p como el espacio $\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\}$.

Sin embargo, no sería una buena elección: mientras la condición con $\log^+|f|$ que define la clase de Nevanlinna impone cierta restricción sobre el crecimiento de $|f(z)|$ cuando $|z|\to 1^-$, aquí esto no sería el caso pues podría haber "cancelaciones" entre los valores de $\log|f|$ que son grandes y positivos ($|f|\to+\infty$) y los que son grandes y negativos ($|f|\approx 0$).

Además, si (por ejemplo) $f=e^g$ con $g\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces $|f|=e^{\operatorname{Re} g}$ y $\operatorname{Re} g\in h(\mathbb{D})$, luego

$$\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} g(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\overset{PVM}{=}g(0),$$

¡independiente de r!

Por tanto, la acotación de $\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$ es mejor elección. Además, resulta fundamental, debido al siguiente resultado.

<u>Tma. (F. y R. Nevanlinna).</u> $N=\{f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}):\exists g,h\in H^\infty \text{ t.q. } f=\frac{g}{h}\}$.

Eso nos permitirá deducir una conclusión muy importante.

Veremos que toda $h\in H^\infty$ tiene límites radiales en c.t.p. de $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$ y que la función límite sólo se puede anular en un conjunto de medida nula en $\mathbb{T}$. De ahí se seguirá que toda $f\in N$ y, por tanto, toda f en cada H^p, $0<p\le\infty$, tiene límites radiales en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

Veremos también que los ceros de una función en H^∞, al igual que los ceros de cualquier $f\in N$ y, por tanto, de cualquier función en cualquier H^p, $0<p\le\infty$, tienen que cumplir la misma condición: $\sum_n(1-|z_n|)<\infty$ (condición de Blaschke) y que siempre existe una función en H^∞ con esos ceros prescritos.